

AF. Aktive Filter

AF.1 Allgemeines

- "Aktiv", weil zur Realisierung der Übertragungsfunktion neben den Elementen R und C auch aktive Elemente (--> Verstärker, Gyrotoren, NIC) benötigt werden. Meist Verwendung von O.P. Manchmal auch diskrete Transistorverstärker.
- Bevorzugter Frequenzbereich: mHz.....einige 100 kHz. Darüber sind RLC-Schaltungen günstiger.
- Mit digitalen Signalprozessoren lassen sich sehr genaue und stabile hochpolige Filter bauen.
Nachteil: Hoher Aufwand.

AF.2 Arten von Filtern (lineare Filter)

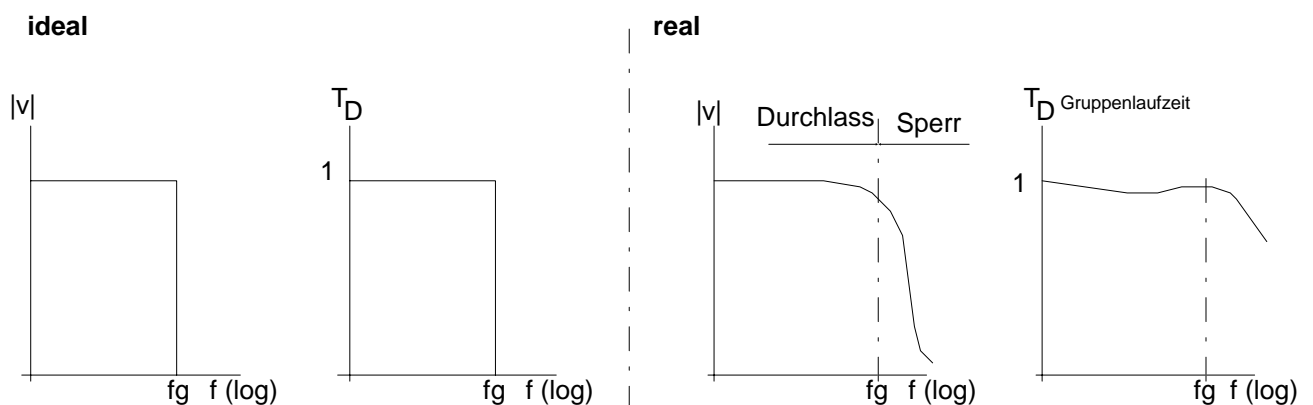


Abb. AF1: Idealer und realer Tiefpaß

AF.2.1 Übertragungsfunktion eines Tiefpasses n-ter Ordnung

Einen TP n-ter Ordnung kann man sich aus n entkoppelten TP 1. Ordnung zusammengesetzt vorstellen:

$$A(P) = \frac{1}{(1 + K_1 P)(1 + K_2 P) \dots (1 + K_n P)} = \quad (\text{AF1})$$

$$= \frac{1}{1 + (K_1 + K_2 + K_3)P + (K_1 K_3 + K_2 K_3 + K_1 K_2)P^2 + K_1 K_2 K_3 P^3} = \frac{1}{1 + c_1 P + c_2 P^2 + c_3 P^3}$$

für $n=3$

Hierin ist P die **normierte komplexe Frequenz**.

$$P = j\Omega = j\frac{\omega}{\omega_g}; \quad \text{bzw.} \quad p = j\omega = P\omega_g$$

Verallgemeinert entsteht die Übertragungsfkt. eines TP n-ter Ordnung mit n als höchster Potenz von P:

$$A(P) = \frac{1}{1 + c_1 P + c_2 P^2 + \dots + c_n P^n} \quad (\text{AF2})$$

In der Praxis werden Filter höherer Ordnung aus Filtern erster und zweiter Ordnung zusammengesetzt. Deshalb wird das Nennerpolynom in Faktoren zerlegt, die jeweils einem Filter 1. bzw. 2. Ordnung entsprechen.

$$A(P) = \frac{A_{01} A_{02} A_{03}}{(1 + a_1 P)(1 + a_2 P + b_2 P^2)(1 + a_3 P + b_3 P^2)} \quad (\text{AF3})$$

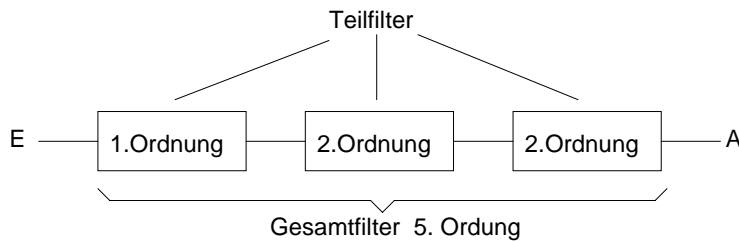


Abb.AF2: Zusammengesetztes Filter

$$A(p) = \frac{A_{01} A_{02} A_{03}}{(1 + a_1 p)(1 + a_2 p + b_2 p^2)(1 + a_3 p + b_3 p^2)}$$

↓
Teilfilter

- Die Teilfilter entsprechen weder in Grenzfrequenz noch in der Filtercharakteristik dem Gesamtfilter. Erst die Zusammenschaltung ergibt die Gesamteigenschaften.

Reihenfolge der Einzelfilter:

Bemessungsgesichtspunkt	Reihenfolge
Frequenzgang	beliebig
Aussteuerbarkeit	Grenzfrequenz der Teilfilter zum Eingang hin abnehmend anordnen
Rauschen	Grenzfrequenz der Teilfilter zum Ausgang hin abnehmend anordnen

- Die Koeffizienten a_i und b_i werden aus Filtertabellen entnommen (siehe später)
- Dieses Prinzip der Filteraufteilung ist für alle Filterarten und -Charakteristiken anwendbar.

AF.2.2 Tiefpaß 1. Ordnung

z. B. RC-Glied.

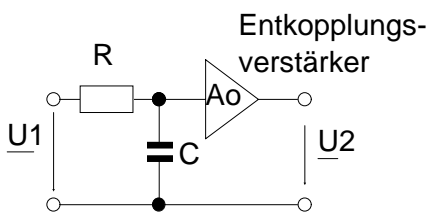


Abb. AF3: RC-Tiefpaß

Mit $\omega_g = \frac{1}{RC}$ und $j\omega = p = P\omega_g$ wird

$$A(p) = \frac{A_0}{1 + P} \quad (\text{AF4})$$

$$\text{Betrag: } |A(p)| = \frac{A_0}{(1 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Verstärkungsabfall im Sperrbereich: $\frac{20\text{dB}}{\text{Dekade}}$

AF.2.3 Tiefpaß 2. Ordnung

Die auf ω_g normierte Form der Übertragungsfunktion des TP. 2. Grades wird verglichen mit der unnormierten Form.

Normiert:

$$A(p) = \frac{A_0}{1 + a p + b p^2} \quad \text{mit } p = P\omega_g, \quad a, b = \text{Filterkoeffizienten} \quad (\text{AF5a})$$

Unnormiert:

$$A(p) = \frac{A_0}{1 + \frac{p}{Q_i \omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad \text{mit } \omega_0 = \text{Kennfrequenz}, \quad Q_i = \text{Polgüte} \quad (\text{AF5b})$$

Durch Koeffizientenvergleich und Einsetzen von $p = P\omega_g$ ist abzulesen:

$$aP = \frac{p}{Q_i \omega_0} \rightarrow a = \frac{\omega_g}{Q_i \omega_0}$$

$$bP^2 = \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 \rightarrow b = \left(\frac{\omega_g}{\omega_0}\right)^2$$

Daraus errechnet sich für die **normierte Kennfrequenz**:

$$\Omega_0 = \frac{\omega_0}{\omega_g} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{a Q_i} \quad (\text{AF6a})$$

und für die **Polgüte**:

$$Q_i = \frac{\sqrt{b}}{a} \quad (\text{AF6b})$$

Der **Betrag der Verstärkung** errechnet sich zu

$$|A(p)| = \frac{A_0}{\sqrt{1 + (a^2 - 2b)\Omega^2 + b^2\Omega^4}} \quad \text{mit } \Omega = \frac{\omega}{\omega_g} \quad (\text{ist nicht auf } \omega_0 \text{ bezogen!}) \quad (\text{AF6c})$$

Die **maximale Amplitudenüberhöhung** tritt auf bei $\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx \omega_0$ für ausreichend große Güte.

$$\text{bzw.: } \Omega_m = \frac{\omega_m}{\omega_g} = \frac{1}{aQ_i} \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Durch Einsetzen in (AF6c) wird nach Rechnung:

$$|A(p)_{\max}| = \frac{A_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{Q_i^2} - \frac{1}{4Q_i^4}}} \approx A_0 Q_i \quad (\text{für } Q_i \geq 3 \text{ Fehler} < 3\%)$$

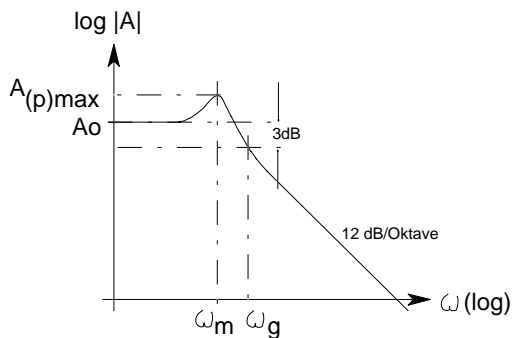


Abb. AF4: Güte und Peaking

$$(\text{AF6d})$$

Die Übertragungsfunktion $A(p) = \frac{A_0}{1 + aP + bP^2}$ mit den Polstellen $P_{1,2} = -\frac{a}{2b} \pm \left[\left(\frac{a}{2b}\right)^2 - \frac{1}{b} \right]^{\frac{1}{2}}$

liefert für Schaltungen mit nur **einer** Art von Blindwiderständen nur dann eine reelle Lösung, wenn $a \geq 2\sqrt{b}$. Die Pole liegen dann auf der reellen Achse der P - Ebene. Dabei ist keine größere Polgüte als $Q_i = 0,5$ zu erreichen.

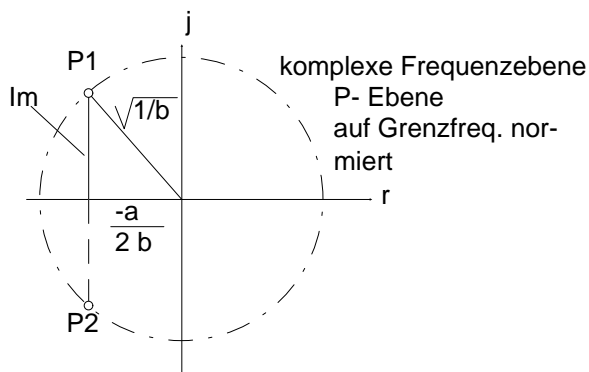


Abb. AF4a: Pole für Nenner 2. Ordnung

Polgüte: $Q_i = \frac{1}{2\delta} = \frac{\sqrt{b}}{a}$;
mit $a \geq 2\sqrt{b}$ wird : $Q_i \leq 0,5$

Für Schaltungen 2. Ordnung mit höherem Q_i muß ein **konjugiert komplexes Polpaar** entstehen.

$$P_{1,2} = -\frac{a}{2b} \pm j \left[\frac{1}{b} - \left(\frac{a}{2b}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{AF7})$$

Die Realisierung solcher Schaltungen ist nur durch die Verwendung von Blindwiderständen verschiedenen Vorzeichens (RLC-Schaltungen) oder durch **aktive RC-Schaltungen erreichbar**.

AF.2.4 Sperrdämpfung und Ordnungszahl

Um eine bestimmte Sperrdämpfung zu erreichen, bedarf es eines Mindestwerts der Ordnungszahl.

Überschlägige Berechnung:

Im asymptotischen Bereich der \ddot{U} -Funktion gilt: $\Omega \gg 1$; d.h. es überwiegen die Terme mit der höchsten Ordnungszahl.

z.B. für TP 1. Ordnung: $A_{(P)} = \frac{A_0}{1+j\Omega}$ und $|A_{(P)}|^2 = \frac{A_0^2}{1+\Omega^2} \approx \left(\frac{A_0}{\Omega}\right)^2$. Wobei $\Omega = \frac{\omega}{\omega_g} = \frac{f}{f_g}$.

Für ein Filter n-ter Ordnung gilt **verallgemeinert**: $|A_{(P)}| \approx \frac{A_0}{\Omega^n}$ (AF8)

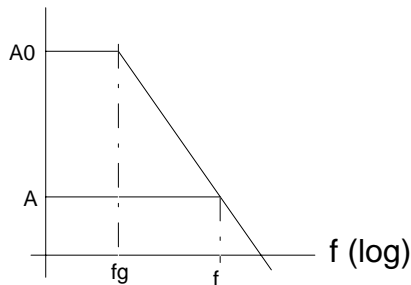


Abb. AF5: Sperrdämpfung und Ordnungszahl

Benötigte Ordnungszahl: $n \approx \frac{\log \left| \frac{A_0}{A} \right|}{\log \Omega}$ (AF9)

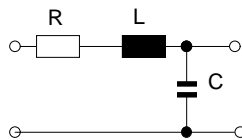
Beispiel: Ein TP mit $f_g = 2,4$ kHz soll bei $f = 6$ kHz eine Dämpfung von $a = 40$ dB aufweisen.

$$n = \frac{\log 100}{\log\left(\frac{6}{2,4}\right)} = 5,02 \text{ --- } > 5. \text{ Ordnung}$$

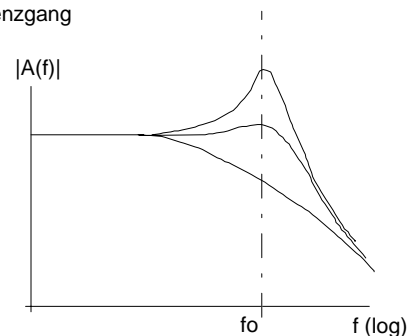
AF.2.5 Filtercharakteristik

Abb. AF6: RLC-TP 2.Grades

Je nach Wahl der Elemente R, L, oder C kann -bei gleichem f_g - der Frequenzgang des Filters verschieden sein.



Frequenzgang



Außer der Ordnungszahl eines TP ist auch seine Charakteristik festzulegen!

Unterscheidung der 3 wichtigsten optimierten Filtercharakteristiken:

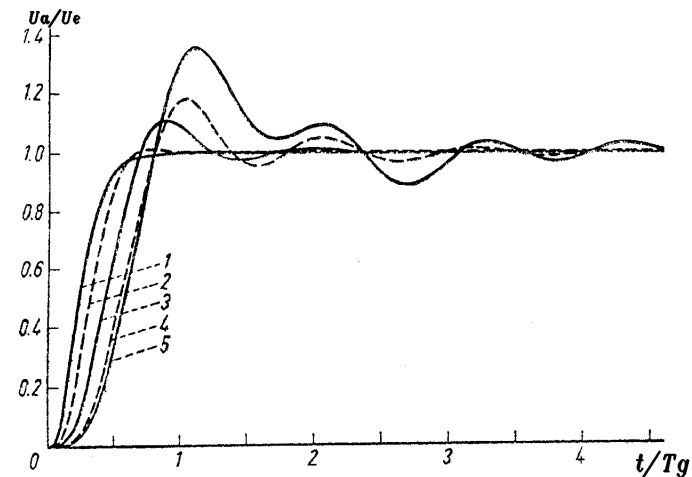
Filtercharakteristik	Eigenschaften
Bessel- Charakteristik (auch Thomson-Approximation)	Gruppenlaufzeit über weiten Übertragungsbereich konstant---> optimale Impulsübertragung. Übergang zum Sperrbereich nicht so scharf wie bei den folgenden Charakteristiken
Butterworth	Frequenzgang im Durchlaßbereich über möglichst weiten Bereich horizontal, knickt kurz vor f_g scharf ab. (" maximal flach ") Überschwingen der Sprungantwort beträchtlich, erhöht sich mit zunehmender Ordnungszahl
Tschebyscheff	Abfall oberhalb von f_g am steilsten, im Durchlaßbereich welliger Verlauf des Amplitudengangs. (Tshebyscheff-F mit Welligkeit 0 geht in Butterworth über) Überschwingen der Sprungantwort noch stärker als bei Butterworth.

Neben den angegebenen Filtercharakteristiken (Approximationen) sind noch andere gebräuchlich:

- **Inverse Tschbyscheff-Charakteristik:** Im Durchlassbereich maximal flache und im Sperrbereich gleichmäßig wellige Amplitudencharakteristik.
- **Elliptische (Cauer-) Charakteristik:** Im Durchlass- wie im Sperrbereich gleichmäßige Welligkeit der Amplitudencharakteristik.

Mit einer gegebenen Schaltung ist mit entsprechender Dimensionierung jede Charakteristik zu erzielen. (Bei aktiven Schaltungen durch entsprechende Bemessung der R's, C's und der Verstärkung der akt. Elemente)

In Abb. AF7 sind die Unterschiede von Sprungantwort und Amplitudengang von TP-Filtern 4. Ordnung und unterschiedlicher Charakteristik zu erkennen.



Legende zu Abb. AF7:

- 1: passiver TP
- 2: Bessel-TP
- 3: Butterworth-TP
- 4: Tschebyscheff-TP mit 0,5 dB Welligkeit im Durchlaßbereich
- 5: Tschebyscheff-TP mit 3 dB Welligkeit im Durchlaßbereich

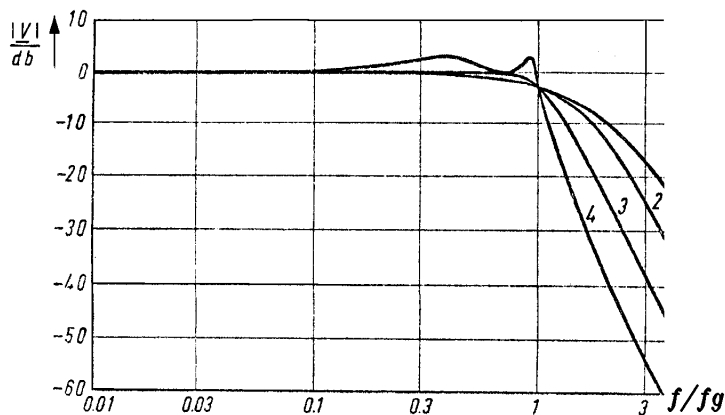


Abb. AF7: Sprungantwort und Ampl.-Gang von TP's 4. Grades

AF.2.6 Optimierte Tiefpässe

AF.2.6.1 Butterworth-TP

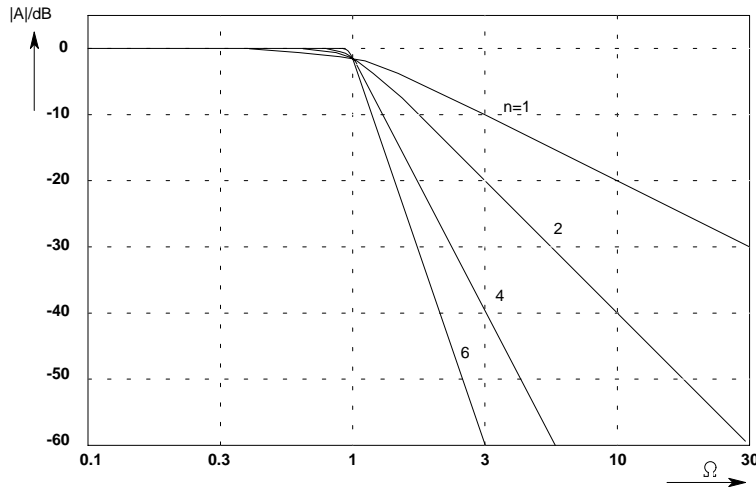


Abb: AF8: Amplitudengang von Butterworth-Tiefpässen

Optimierungsgesichtspunkt: $A(P)$ soll unterhalb ω_g möglichst horizontal verlaufen und erst kurz vor ω_g scharf abknicken.

$$A(P) = \frac{A_0}{1 + c_1 P + c_2 P^2 + \dots + c_n P^n}$$

Betragsquadrat: $|A(P)|^2 = \frac{A_0^2}{1 + B_2 \Omega^2 + B_4 \Omega^4 + \dots + B_{2n} \Omega^{2n}}$ (AF10)

- Der Optimierungsgesichtspunkt wird am besten erfüllt, wenn möglichst nur die höchste Potenz von Ω in die Rechnung eingeht. Daraus folgt die Bedingung:

$$|A(P)|^2 = \frac{A_0^2}{1 + B_{2n} \Omega^{2n}}$$

Bei $\Omega = 1$ (normierte Grenzfrequenz) soll $|A(P)|$ um 3 dB abgenommen haben.

$$|A(P)|^2 \text{ für } \Omega=1 = \left(\frac{A_0}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ eingesetzt: } \frac{A_0^2}{2} = \frac{A_0^2}{1 + B_{2n}} \text{ --- } > B_{2n} = 1$$

- somit gilt beim Butterworth-TP:

$$|A(P)|^2 = \frac{A_0^2}{1 + \Omega^{2n}} \quad (\text{AF11})$$

Der Koeffizientenvergleich mit dem Betragsquadrat der Ü-Fkt. eines allgemeinen TP liefert die Koeffizienten. Für einen TP 2. Ordnung entsteht entspr. Gln. (AF12):

$$|A(P)|^2 = \frac{A_0^2}{1 + (a_1^2 - 2b_1) \Omega^2 + b_1^2 \Omega^4} \quad (\text{AF11a})$$

und der Koeffizientenvergleich mit (AF11) ergibt:

$$a_1^2 - 2b_1 = 0 \text{ und } b_1^2 = 1.$$

Daraus erhält man die Koeffizienten a_i und b_i für die Schaltungsdimensionierung. Die Koeffizienten beziehen sich auf Gln. (AF3).

Ordnungszahl n	Koeffizient a_i	Koeffizient b_i	allgemein
1	1	0	
2	$\sqrt{2}$	1	$a_1^2 = 2 b_1$

AF.2.6.2 Tschebyscheff-Tiefpässe

Bei Tschebyscheff-TP schwankt die Verstärkung im Durchlaßbereich in Wellen gleichen Ausschlags, ab $f > f_g$ sinkt die Verstärkung monoton ab.

Die Grundlage der Berechnung ist das Tschebyscheff-Polynom, welches für jede Ordnungszahl ein bestimmtes Polynom liefert: (Hier bis $n=4$)

Ordnungszahl	Polynom	
$n=1$	$T_{1(x)} = x$	schwankt für $0 \leq x \leq 1$
$n=2$	$T_{2(x)} = 2x^2 - 1$	
$n=3$	$T_{3(x)} = 4x^3 - 3x$	zwischen
$n=4$	$T_{4(x)} = 8x^4 - 8x^2 + 1$	$0 \dots 1$ bzw. $-1 \dots 0$

Das Betragsquadrat der Ü-Fkt. eines Tschebyscheff-TP lautet:

$$|A(x)|^2 = \frac{k A_0^2}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(x)}$$

k wird so gewählt, daß $|A(x=0)|^2 = A_0^2$

Der Verlauf wird von der Ordnungszahl abhängig:

Ordnungszahl	Schwankungsbereich der Verstärkung
gerades n	schwankt zwischen A_0 und $A_0 \sqrt{1 + \varepsilon^2}$
ungerades n	schwankt zwischen A_0 und $A_0 / \sqrt{1 + \varepsilon^2}$

- Die Ordnungszahl gibt an, wie oft die Extremalwerte berührt werden, bevor der untere Grenzwert erreicht ist.
- Je steiler der Abfall im Sperrbereich desto größer die Welligkeit im Durchlaßbereich.
- Steilheit des Abfalls mit ε stufenlos einstellbar. **Dimensionierung meist nach Tabellenwerten mit festen Abstufungen der Welligkeit.**

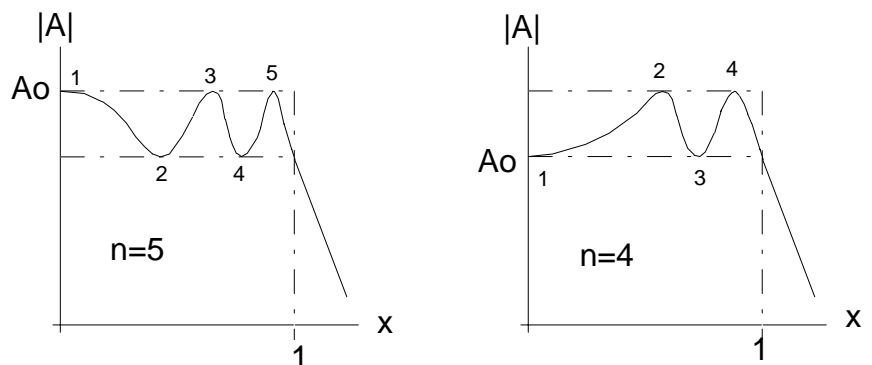


Abb. AF9: Welligkeit beim Tschebyscheff-TP

AF.2.6.3 Bessel-Tiefpaß

Optimierungsgesichtspunkt:

Optimales Rechteckübertragungsverhalten. Erreichbar durch möglichst frequenzunabhängige Gruppenlaufzeit unterhalb der Grenzfrequenz f_g , d.h die Phasenverschiebung muß frequenzproportional sein.

Verfahren am TP 2. Ordnung erläutert:

$$A(P) = \frac{A_0}{1 + a_1 P + b_1 P^2} = \frac{A_0}{1 + j a_1 \Omega - b_1 \Omega^2} \quad \text{daraus entsteht für den Betrag:}$$

$$|A(P)|^2 = \frac{A_0^2}{1 + (a_1^2 - 2b_1) \Omega^2 + b_1^2 \Omega^4} \quad (\text{AF12})$$

$$\text{Phase: } \varphi = - \arctan \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = - \arctan \frac{a_1 \Omega}{1 - b_1 \Omega^2} \quad (\text{AF13})$$

$$\text{Gruppenlaufzeit: } t_{gr} = \frac{-d\varphi}{d\omega} \quad \text{wird normiert auf die Periodendauer bei } \omega_g \quad T_g = \frac{1}{f_g} = \frac{2\pi}{\omega_g} \quad (\text{AF14})$$

$$\text{Normierte Gruppenlaufzeit: } T_{gr} = \frac{t_{gr}}{T_g} = \frac{1}{2\pi} t_{gr} \omega_g = - \frac{\omega_g}{2\pi} \frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{-1}{2\pi} \frac{d\varphi}{d\Omega} \quad (\text{AF15})$$

mit Gln. (AF13) wird:

$$T_{gr} = \frac{1}{2\pi} \frac{a_1(1+b_1\Omega^2)}{1+(a_1^2-2b_1)\Omega^2+b_1^2\Omega^4} \quad (\text{AF16})$$

Für Frequenzen weit unterhalb von f_g gilt $\Omega \ll 1$. Damit geht Term mit Ω^4 nicht mehr ein. Es wird

$$T_{gr} = \frac{1}{2\pi} \frac{a_1(1+b_1\Omega^2)}{1+(a_1^2-2b_1)\Omega^2} = \frac{a_1}{2\pi} \frac{1+b_1\Omega^2}{1+(a_1^2-2b_1)\Omega^2} \quad (\text{AF17})$$

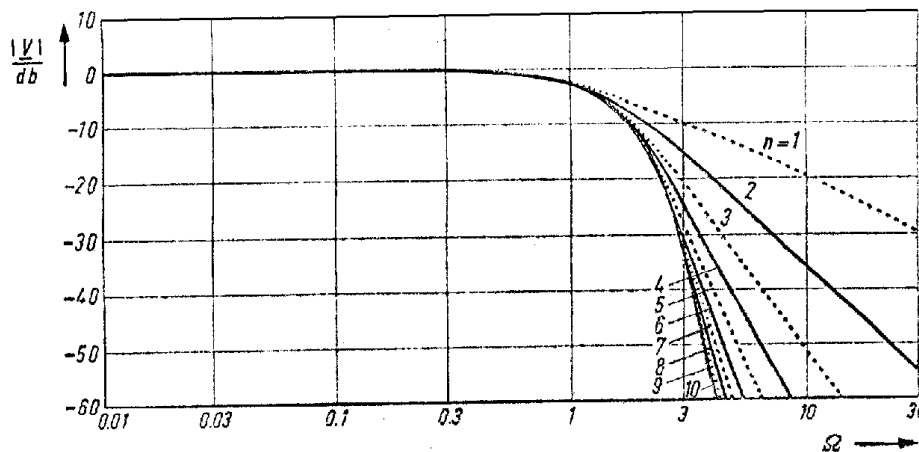
Die Gruppenlaufzeit wird von Ω unabhängig, wenn

$$b_1 = a_1^2 - 2b_1 \quad \text{bzw.} \quad a_1^2 = 3b_1 \quad (\text{AF18})$$

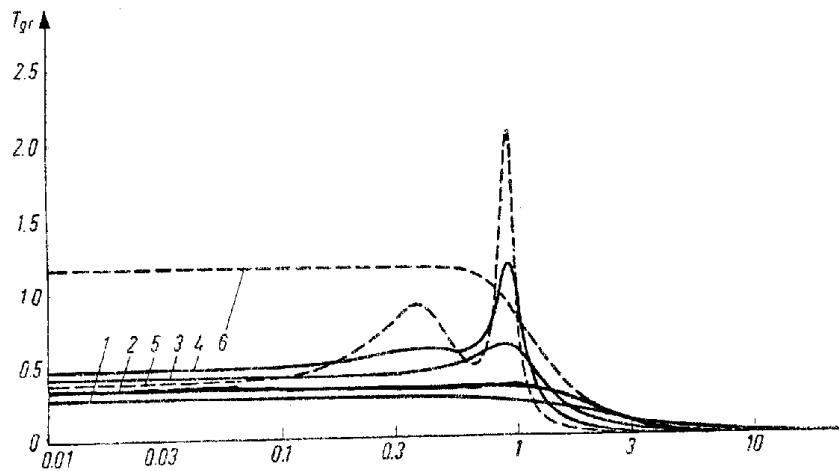
Zugleich muß bei $\Omega = 1$ gelten: $|A_{(P)}|^2 = \frac{1}{2}$ (3-dB-Grenze). Dies liefert aus Gln AF(12): $a_1^2 - 2b_1 + b_1^2 = 1$ und man kann mit Gln. (AF18) die Koeffizienten für einen Bessel-TP 2. Ordnung berechnen:

$$a_1 = 1.3616 \quad b_1 = 0.6180 \quad (\text{AF19})$$

- Bei Besselfiltern erfahren Signale unterschiedlicher Frequenz ein Minimum an Zeitverschiebung im Durchlaßbereich. Sie sind deshalb vorteilhaft bei oberwellenhaltigen Signalen.



Amplitudengang der Verstärkung von Bessel-Tiefpässen n-ter Ordnung



Frequenzgang der Gruppenlaufzeit von TP-Filtern 4. Ordnung.

- Graph 1: Passiver TP
- Graph 2: Bessel-TP
- Graph 3: Butterworth-TP
- Graph 4: Tschb.-TP, Well. 0.5 dB
- Graph 5: Tschb.-TP, Well. 3 dB
- Graph 6: Allpaß

Abb. AF10: Frequenzgang u. Gruppenlaufzeit

AF.2.7. Hochpaßfilter

Die Übertragungsfunktion eines Hochpasses entsteht durch Spiegelung eines TP an der Grenzfrequenz f_g .

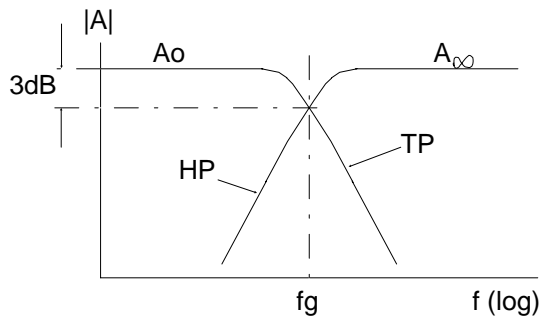


Abb. AF11: Zur TP-HP-Transformation

Tiefpaß - Hochpaß - Transformation:

$$\Omega \text{ --- } > \frac{1}{\Omega}$$

$$P \text{ --- } > \frac{1}{P}$$

$$A_0 \text{ --- } > A_\infty \quad (A_\infty \text{ ist die Verst. bei } f = \infty)$$

$$\text{Es war: } A_{(P)}^{TP} = \frac{A_0}{\prod_i (1 + a_i P + b_i P^2)} \quad (\text{Tiefpaß})$$

Nach Transformation wird für den **äquivalenten Hochpaß**:

$$A_{(P)}^{HP} = \frac{A_\infty}{\prod_i \left(1 + \frac{a_i}{P} + \frac{b_i}{P^2} \right)} \quad (\text{AF20})$$

Ansonsten Berechnung wie beim Tiefpaß!

AF.2.8 Benutzung von Filtertabellen.

Wie unter AF.2.1 erwähnt, werden TP und HP höherer Ordnung meist aus Filtern 1. und 2. Ordnung zusammengesetzt.

$$A_{(P)} = \frac{A_{01} A_{02} A_{03}}{(1 + a_1 P)(1 + a_2 P + b_2 P^2)(1 + a_3 P + b_3 P^2)}$$

Die Indices $i= 1, 2, \dots, m$ der Koeffizienten entsprechen den Teilfiltern 1, 2, ..., m.

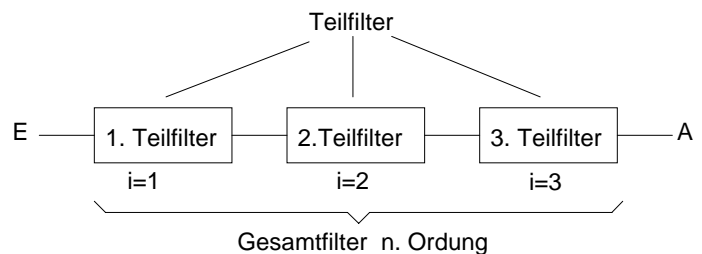


Abb. AF12: Aufspaltung in Teilfilter

- Die zur Berechnung der Bauelemente der Filter benötigten Koeffizienten a_i und b_i sind den nachstehend wiedergegebenen, **stark verkürzten Tabellen** zu entnehmen. Umfangreichere Tabellen unter < 1 > .
- Die Umsetzung der Koeffizienten in Bauelementewerte hängt von der jeweils gewählten Schaltung ab und wird in Kap. AF.3 erläutert.
- **Für die Berechnung der Elemente der Teilfilter ist die Grenzfrequenz f_g des Gesamtfilters einzusetzen.** Die in den Tabellen angegebene f_{gi} der Teilfilter ist nur als Hilfsangabe für das Austesten der Einzelstufen vorgesehen.

AF.2.9 Filtertabellen (gekürzt)

AF.2.9.1 Filter mit kritischer Dämpfung (Gauß-Typ)

n	i	a_i	b_i	f_{gi}/f_g	$(t_d + t_r) f_{g_n}$	Q_i
1	1	1.0000	0.0	1.0		
2	1	1.2872	0.4142	1.0	0.516	0.5
3	1	0.5098	0.0	1.961		
	2	1.0197	0.2599	1.262		0.5
4	1	0.8700	0.1892	1.480	0.537	0.5
	2	0.8700	0.1892	1.480		0.5
5	1	0.3856	0.0	2.593		0.5
	2	0.7712	0.1487	1.669		0.5
	3	0.7712	0.1487	1.669		0.5
6	1	0.6999	0.1225	1.839	0.657	0.5
	2	0.6999	0.1225	1.839		0.5
	3	0.6999	0.1225	1.839		0.5

AF.2.9.2 Besselfilter

n	i	a_i	b_i	f_{gi}/f_g	$(t_d + t_r) f_{g_n}$	Q_i
1	1	1.000	0.0	1.0		
2	1	1.3617	0.6180	1.0	0.539	0.58
3	1	0.7560	0.0	1.323		
	2	0.9996	0.4772	1.414		0.69
4	1	1.3397	0.4889	0.978	0.681	0.52
	2	0.7743	0.3890	1.797		0.81
5	1	0.6656	0.0	1.502		
	2	1.1402	0.4128	1.184		0.56
	3	0.6216	0.3245	2.138		0.92
6	1	1.2217	0.3887	1.063	0.778	0.51
	2	0.9686	0.3505	1.431		0.61
	3	0.5131	0.2756	2.447		1.02

AF.2.9.3 Butterworth-Filter

n	i	a_i	b_i	f_{gi}/f_g	$(t_d + t_r) f_{g_n}$	Q_i
1	1	1.0000	0.0	1.0		
2	1	1.4142	1.0	1.0	0.570	0.71
3	1	1.0	0.0	1.0		
	2	1.0	1.0	1.272		1.0
4	1	1.8478	1.0	0.719	0.836	0.54
	2	0.7654	1.0	1.390		1.31
5	1	1.0	0.0	1.0		
	2	1.6180	1.0	0.859		0.62
	3	0.6180	1.0	1.448		1.62
6	1	1.9319	1.0	0.676	1.09	0.52
	2	1.4142	1.0	1.0		0.71
	3	0.5176	1.0	1.479		1.93

AF.2.9.3 Tschebyscheff-Filter mit 0.5 dB Welligkeit

n	i	a_i	b_i	f_{gi}/f_g	$(t_d + t_r) f_{g_n}$	Q_i
1	1	1.0000	0.0	1.0		
2	1	1.3614	1.3827	1.0	0.589	0.86
3	1	1.8636	0.0	0.537		
	2	0.6402	1.1931	1.335		1.71
4	1	2.6282	3.4341	0.538	0.997	0.71
	2	0.3648	1.1509	1.419		2.94
5	1	2.9236	0.0	0.342		
	2	1.3025	2.3534	0.881		1.18
	3	0.2290	1.0833	1.480		4.54
6	1	3.8645	6.9797	0.366	1.362	0.68
	2	0.7528	1.8573	1.078		1.81
	3	0.1589	1.0711	1.495		6.51

AF.2.9.4 Tschebyscheff-Filter mit 3 dB Welligkeit

n	i	a_i	b_i	f_{gi}/f_g	$(t_d + t_r) f_{g_n}$	Q_i
1	1	1.0000	0.0	1.0		
2	1	1.0650	1.9305	1.0	0.589	1.30
3	1	3.3496	0.0	0.299		
	2	0.3559	1.1923	1.396		3.07
4	1	2.1853	5.5339	0.557	0.997	1.08
	2	0.1964	1.2009	1.410		5.58
5	1	5.6334	0.0	0.178		
	2	0.7620	2.6530	0.197		2.14
	3	0.1172	1.0686	1.500		8.82
6	1	3.2721	11.6773	0.379	1.382	1.04
	2	0.4077	1.9873	1.086		3.46
	3	0.0815	1.0861	1.489		12.78

n	=	Ordnungszahl des Filters
i	=	Nummer des Teilfilters
a_i, b_i	=	Koeffizienten des i-ten Teilfilters
f_{gi}/f_g	=	Grenzfrequenz des Teilfilters i bezogen auf die Grenzfrequenz des Gesamtfilters
Q_i	=	Polgüte des Teilfilters i.
$(t_d + t_r)$	=	auf $T_g = 1/f_g$ normierte Verzögerungs- und Anstiegszeit des Gesamtfilters

Beispiel:

Für einen Bessel - TP 5. Ordnung sind die Filterkoeffizienten zu ermitteln.

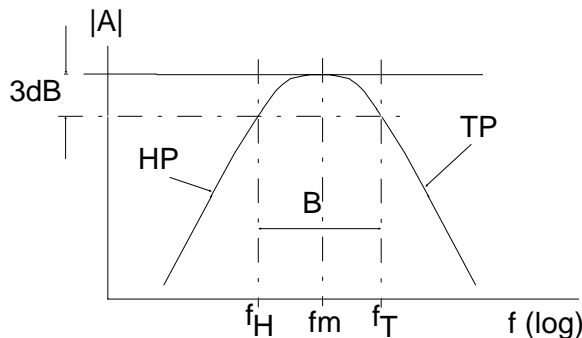
Bessel, n= 5:

i - tes Filter	a_i	b_i	Ordnungszahl des Teilfilters
1	0.6656	0.0	1.Ordnung
2	1.1402	0.4128	2. O.
3	0.6216	0.3245	2. O.

AF.2.10 Bandpaß

Ein Bandpaß kann als Reihenschaltung eines TP und eines HP dargestellt werden.

$$A^{BP} = A^{TP} \cdot A^{HP} \quad (\text{AF21})$$



$$\text{Bandbreite: } B = \Delta f = f_T - f_H \quad (\text{AF22a})$$

$$\text{Mittenfrequenz: } f_m = \sqrt{f_T f_H} \quad (\text{meist auch } f_0) \quad (\text{AF22b})$$

$$\text{Güte: } Q = \frac{f_m}{B} \quad (\text{AF22c})$$

- Fallen f_T und f_H zusammen, entsteht ein **selektives Filter**
- Sind die Frequenzgänge des HP und des TP symmetrisch zueinander, spricht man von Schwingkreisverhalten.

Abb: AF13: Frequenzgang eines Bandpasses

Selektives Filter 2. Ordnung (Schwingkreis)

Serienschaltung je eines TP und HP 1. Ordnung:

$$A_{(P)}^{TP} = \frac{A_0}{1 + a_1 P} \quad \text{und} \quad A_{(P)}^{HP} = \frac{A_\infty}{1 + \frac{a_1}{P}}$$

durch Multiplikation der Frequenzgänge entsteht:

$$A_{(P)} = \frac{\frac{A_0 A_\infty}{a_1} P}{1 + \frac{a_1^2 + 1}{a_1} P + P^2} = \frac{\alpha P}{1 + \beta P + P^2} \quad \text{Übertragungsfunktion eines Schwingkreises} \quad (\text{AF23})$$

Hierbei wird p auf die Resonanzfrequenz ω_0 normiert: $P = \frac{p}{\omega_0}$; bzw. $p = \omega_0 P$

Die Bedingung, daß an den Grenzfrequenzen f_{gu} , f_{go} die Verstärkung um 3 dB abgesunken sein muß, liefert:

$$Q = \frac{1}{\beta} = \frac{f_0}{f_{go} - f_{gu}} \quad \text{Güte des Kreises} \quad (\text{AF24})$$

$$A_r = \frac{\alpha}{\beta} = \text{Verstärkung bei Resonanzfrequenz} \quad (\text{AF25})$$

$$B = \frac{f_0}{Q} = \text{Bandbreite} \quad (\text{AF26})$$

$$\beta = \frac{B}{f_0} = \text{normierte Bandbreite} \quad (\text{AF27})$$

Gln. (AF24, 25) in Gln. (AF23) ergibt:

$$A_{(P)} = \frac{\beta A_r P}{1 + \frac{1}{Q} P + P^2} = \frac{\frac{A_r}{Q} P}{1 + \frac{1}{Q} P + P^2} \quad (\text{AF28})$$

- Gln.(AF28) liefert den unmittelbaren **Zusammenhang zwischen Frequenzgang und den charakteristischen Größen Q und Ar** eines selektiven Filters.

Betrag der Verstärkung eines selektiven Filters:

$$|A_{(P)}| = \frac{\frac{A_r}{Q} \Omega}{\left(1 + \Omega^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) + \Omega^4\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{mit} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (\text{AF29})$$

AF.2.11 Bandsperre

- Die Addition der Übertragungsfunktionen eines TP und eines HP ergeben eine Bandsperrenfunktion.

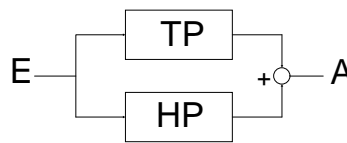
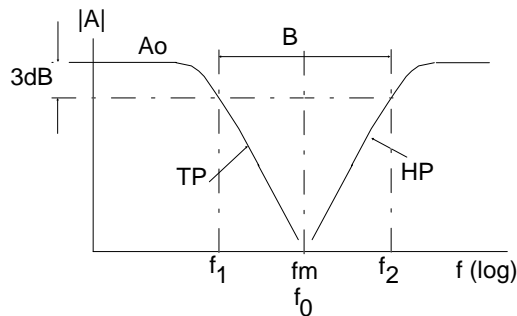


Abb. AF14a:
Entstehung einer Bandsperre

Abb. AF14: Ü-Funktion einer Bandsperre

Man definiert wieder:

$$\text{Bandbreite: } B = \Delta f = f_2 - f_1 \quad (\text{AF30a})$$

$$\text{Mittenfrequenz: } f_m = f_0 = \sqrt{f_1 f_2} \quad (\text{AF30b})$$

$$\text{Unterdrückungsgüte: } Q = \frac{f_0}{B} \quad (\text{AF30c})$$

Mit einem TP und einem HP jeweils 2. Ordnung mit $f_1 = f_2 = f_0$ entsteht ein **selektives Sperrfilter** oder **Notch-Filter 2. Ordnung**.

Frequenzgang eines Notch-Filters 2. Ordnung:

$$A(P) = \frac{\alpha(1+P^2)}{1+\beta P+P^2} \quad \text{mit } \alpha = A_0 = A(\Omega=0) \quad (\text{AF31})$$

Ähnlich wie beim selektiven Filter 2. Ordnung errechnen sich:

$$\Omega_{1|2} = \pm \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \left(\beta^2 - 4 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{AF32})$$

$$Q = \frac{f_0}{B} = \frac{1}{\beta} \quad (\text{AF33})$$

Die Unterdrückungsgüte gibt an, wie **schmal der Sperrbereich** ist, aber nicht wie groß die **Sperrdämpfung** bei der Sperrfrequenz f_0 ist. Die Sperrdämpfung ist im Idealfall unendlich, in der Praxis aber von der Genauigkeit der Schaltelemente eines Sperrfilters abhängig.

$$A(P) = \frac{A_0(1+P^2)}{1+\frac{1}{Q}P+P^2} \quad (\text{AF34})$$

$$|A(P)| = \frac{A_0(1-\Omega^2)}{\left(1+\Omega^2\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)+\Omega^4\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{AF35})$$

AF.2.12 Allpaß-Filter (AP)

Allpässe übertragen alle Frequenzanteile mit konstanter Verstärkung aber einer frequenzabhängigen Phasenverschiebung. **Hauptanwendung** sind Signalverzögerung und Phasenentzerrung oder -Verschiebung. Das Merkmal der Übertragungsfunktion eines Allpasses ist, dass Nenner- und Zählerpolynom konjugiert komplex aufgebaut sind, weshalb der Betrag der Ü-Funktion frequenzunabhängig konstant bleibt.

Auch bei Allpässen werden Filter höherer Ordnung sinnvollerweise nach dem Prinzip von Kap. AF.2.1 aus Filtern 1. und 2. Ordnung aufgebaut. Der grundsätzliche Rechnungsgang wird an einem Allpass 2. Ordnung gezeigt:

In der Ü-Funktion eines TP 2. Ordnung wird der Zähler durch den konjugiert komplexen Nenner ersetzt. Vergleiche Rechnung beim Bessel-Tiefpass in Kap. AF.2.6.3. es entsteht die

Übertragungsfunktion eines Allpasses 2. Ordnung:

$$A(P) = \frac{1 - a_1 P + b_1 P^2}{1 + a_1 P + b_1 P^2} = \frac{1 - ja_1 \Omega - b_1 \Omega^2}{1 + ja_1 \Omega - b_1 \Omega^2} = \frac{\sqrt{1 - 2b\Omega^2 + b^2\Omega^4 + a^2\Omega^2} e^{-j\beta}}{\sqrt{1 - 2b\Omega^2 + b^2\Omega^4 + a^2\Omega^2} e^{+j\beta}} = 1 \cdot e^{-j2\beta} \quad (\text{AF 36})$$

mit der **Phase** $\varphi = -2\beta = -2 \arctan \frac{a_1 \Omega}{1 - b_1 \Omega^2}$

Gruppenlaufzeit: $t_{gr} = \frac{-d\varphi}{d\omega}$ wird normiert auf $T_g = \frac{1}{f_g} = \frac{2\pi}{\omega_g}$ (AF 37)

Normierte Gruppenlaufzeit: $T_{gr} = \frac{t_{gr}}{T_g} = t_{gr} f_g = \frac{1}{2\pi} t_{gr} \omega_g = -\frac{\omega_g}{2\pi} \frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{-1}{2\pi} \frac{d\varphi}{d\Omega} =$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{a_1(1 + b_1 \Omega^2)}{1 + (a_1^2 - 2b_1)\Omega^2 + b_1^2 \Omega^4} \quad (\text{AF 38})$$

Bei tiefen Frequenzen wird die normierte Gruppenlaufzeit

$$T_{gr0} = \frac{a_1}{\pi} \text{ (für AP 2. Ordnung), sonst allgemein: } T_{gr0} = \frac{1}{\pi} \sum_i a_i \quad (\text{AF 38a})$$

Für die Anwendung zur Signalverzögerung muß gelten:

- Verstärkung frequenzunabhängig (erfüllt!)
- Gruppenlaufzeit im Übertragungsbereich konstant.

Besselfilter erfüllen die Bedingung einer frequenzunabhängigen Gruppenlaufzeit am besten, daher kann deren Optimierungsalgorithmus angewendet werden.

Umnormierung: Der Begriff der Grenzfrequenz als 3-dB-Abfall der Verstärkung verliert hier seinen Sinn, daher werden die Filterkoeffizienten so berechnet, dass bei der "Grenzfrequenz" f_g ($\Omega = 1$) die Gruppenlaufzeit auf das $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fache des Werts bei tiefen Frequenzen abgesunken ist.

Verkürzte Tabelle mit Koeffizienten für Allpässe normiert auf $T_{gr} = \frac{T_{gr0}}{\sqrt{2}}$ bei $f = f_g$.

n	i	a _i	b _i	T _{gr0}
1	1	0,6436	0	0,2049
2	1	1,6278	0,8832	0,5181
3	1	1,1415	0	0,8437
	2	1,5092	1,0877	
4	1	2,3370	1,4878	1,1738
	2	1,3506	1,1837	
5	1	1,2974	0	1,5060
	2	2,2224	1,5685	

Vollständige Tabelle in < 1 >

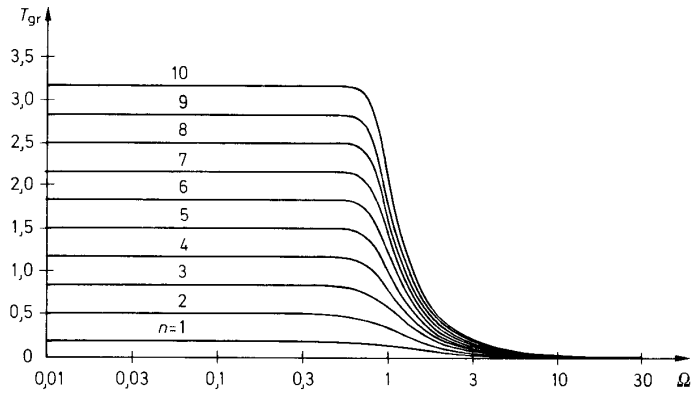


Abb.15: Gruppenlaufzeit eines AP der Ordnung n

	3	1,2116	1,2330	
--	---	--------	--------	--

Zahlenbeispiel:

Ein Signal mit einem Frequenzspektrum von 0 - 2,4 kHz soll um $t_{gr0} = 0,45$ ms verzögert werden.

Der gesamte Allpass muss eine normierte Gruppenlaufzeit von

$$T_{gr0} = t_{gr0} \cdot f_g = 0,45 \text{ ms} \cdot 2,4 \text{ kHz} = 1,08 \text{ haben.}$$

--> Man benötigt einen Allpass 4.Ordnung mit der Grenzfrequenz

$$f_g = \frac{T_{gr0}^{(4)}}{t_{gr0}} = \frac{1,1738}{0,45 \text{ ms}} = 2,6 \text{ kHz.}$$

AF.3 Realisierung aktiver RC- Filter mit Operationsverstärkern

Das Berechnungsprinzip ist stets gleich:

- Aufstellen der Übertragungsfunktion der in Frage kommenden Schaltung
- Normierung auf kleinste Potenz von P
- Koeffizientenvergleich mit der in Kap. AF.2.xx für die entsprechenden Filtertypen hergeleiteten oder angegebenen Normalform der Übertragungsfunktion.
- Entnahme der Filterkoeffizienten a_i, b_i aus den Tabellen
- Berechnung der Schaltelemente

AF.3.1 Aktive Filterschaltungen 1. Ordnung

AF.3.1.1 Tiefpaß 1. Ordnung

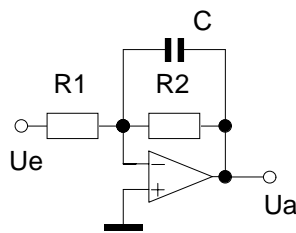


Abb. AF16: Aktiver TP 1. Ordnung

$$A(p) = \frac{(-)R_2}{R_1} \frac{1}{1 + R_2 pC} = \frac{(-)R_2}{R_1} \frac{1}{1 + R_2 P \omega_g C} \quad (\text{AF39})$$

Koeffizientenvergleich mit (AF4):

$$1 = \omega_g R_2 C \quad \text{und} \quad |A_0| = \frac{R_2}{R_1}$$

daraus folgt bei Vorgabe von f_g, C und A_0 :

$$R_2 = \frac{1}{2\pi f_g C} \quad \text{und} \quad R_1 = \frac{1}{2\pi f_g C |A_0|} \quad (\text{AF40a,b})$$

AF.3.1.2 Hochpaß 1. Ordnung

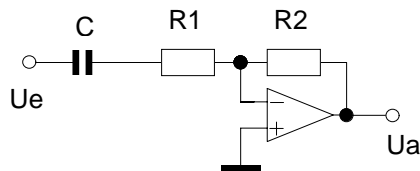


Abb. AF17: Aktiver HP 1. Ordnung

Ähnliche Rechnung liefert:

$$R_1 = \frac{1}{2\pi f_g C} \quad (\text{AF41a})$$

$$R_2 = |A_\infty| R_1 \quad (\text{AF41b})$$

bei Vorgabe von f_g, C und A_∞ .

Beispiel zur Ermittlung der Beziehungen (AF41a,b)

$$A(p) = -\frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{pC}} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{pCR_1}} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{P\omega_g CR_1}} \quad \text{wird verglichen mit (AF20): } A_{(P)}^{HP} = \frac{A_\infty}{\left(1 + \frac{a_i}{P}\right)}$$

und liefert dann:

$$A_\infty = (-)\frac{R_2}{R_1} \quad \text{und} \quad a_i = \frac{1}{\omega_g CR_1} = \frac{1}{2\pi f_g CR_1} = 1 \quad (\text{s. Filtertab. } n=1)$$

AF.3.1.3 Allpass 1. Ordnung

Allpässe werden - neben anderen Schaltungskonzepten - meist aus passiven oder aktiven Brückenschaltungen entwickelt.

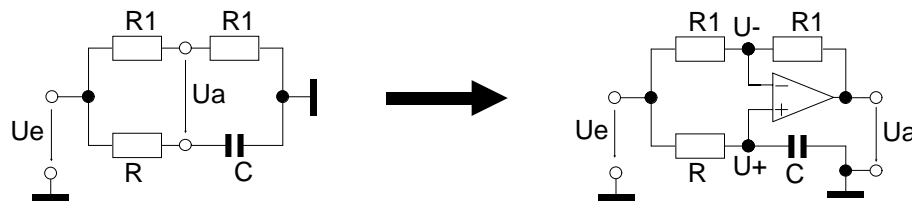


Abb. 18: Passiver und aktiver Allpass 1. Ordnung

Berechnung der Übertragungsfunktion der aktiven Schaltung:

$$U_- = \frac{1}{2} (U_{e+} + U_a) \quad U_+ = U_e \frac{\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = U_e \frac{1}{1 + pCR} \quad (\text{AF42a,b})$$

Die Bedingung $U_+ = U_-$ liefert nach Rechnung:

$$A(p) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1 - pCR}{1 + pCR} \quad (\text{AF43})$$

Normiert auf ω_g mit $P = \frac{p}{\omega_g}$ wird die **Übertragungsfunktion**:

$$A(P) = \frac{1 - \omega_g P C R}{1 + \omega_g P C R} = \frac{1 - j \Omega \omega_g C R}{1 + j \Omega \omega_g C R} \quad (\text{AF44})$$

Der **Koeffizientenvergleich** mit Gln.(AF36) liefert:

$$a_1 = \omega_g RC \quad \rightarrow \quad RC = \frac{a_1}{2\pi f_g} \quad (\text{daraus Berechnung von R bei vorgegebenem C}) \quad (\text{AF45})$$

Gruppenlaufzeit bei tiefen Frequenzen:

$$t_{gr0} = \frac{T_{gr0}}{f_g} = \frac{a_1}{\pi f_g} = 2 \cdot RC \quad (\text{AF46})$$

Frequenzabhängige Phase (aus Gln.(AF38a):

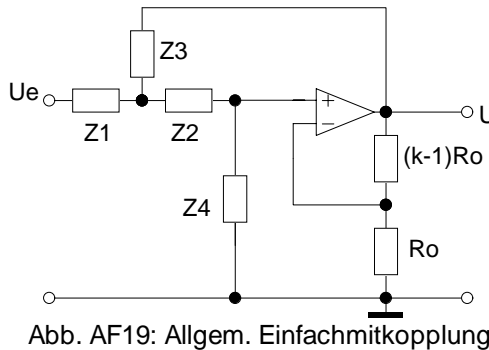
$$\varphi = -2 \arctan\left(a_1 \frac{f}{f_g}\right) = -2 \arctan(2\pi f RC) \quad (\text{AF47})$$

AF.3.2 Aktive Filterschaltungen 2. Ordnung

Es bestehen grundsätzlich mehrere Möglichkeiten zur Realisierung von Filtern 2. Ordnung. Als günstige Lösungen hinsichtlich Schaltungsaufwand und Empfindlichkeit auf Änderung der Werte der Bauelemente haben sich Schaltungen erwiesen mit

- Einfachgegenkopplung
- Mehrfachgegenkopplung
- Einfachmitkopplung (sog. Sallen-Key-Schaltung)
Sallen-Key-Prinzip wird am häufigsten verwendet. ---> hier behandelt.

AF.3.2.1 Allgemeine Einfachmitkopplung (Sallen-Key-Schaltung)



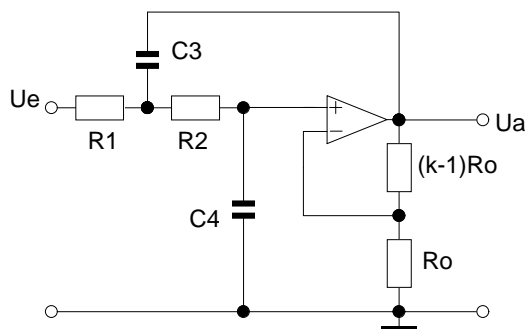
Durch die Gegenkopplung mit R_o wird die Verstärkung des O.P. auf einen bestimmten Wert eingestellt.

Die Analyse ergibt für die Übertragungsfunktion:

$$A(p) = \frac{k Z_3 Z_4}{Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_1 + Z_4 Z_3 + Z_4 Z_1 (1 - k)} \quad (\text{AF48})$$

Abb. AF19: Allgem. Einfachmitkopplung

AF.3.2.2 TP 2. Grades mit Einfachmitkopplung



- Es ist zu beachten, daß die Eingänge des O.P. einen Gleichstrompfad vorfinden, über den die Eingangsruheströme fließen können! Im vorliegenden Fall darf die Signalquelle U_e den Gleichstrom nicht sperren.

$$\text{man setzt } Z_3 = \frac{1}{pC_3} \text{ und } Z_4 = \frac{1}{pC_4}$$

und erhält mit $p = \omega_g P$.

Abb. AF20: TP 2. Grades

$$A(p) = \frac{k}{1 + \omega_g P \left[R_1 C_4 + R_2 C_4 + (1 - k) R_1 C_3 \right] + \omega_g^2 P^2 R_1 R_2 C_3 C_4} \quad (\text{AF49})$$

Häufig setzt man $k=1$ (Spannungsfollower), dann kann auch ein Emitterfolger verwendet werden.

$$A(p) = \frac{1}{1 + \omega_g P C_4 (R_1 + R_2) + \omega_g^2 P^2 R_1 R_2 C_3 C_4} \quad (\text{AF50})$$

Koeffizientenvergleich mit Gln.(AF5): $A(p) = \frac{A_0}{1 + ap + bp^2}$ liefert:

$$A_0 = 1, \quad a = \omega_g C_4 (R_1 + R_2) \quad \text{und} \quad b = \omega_g^2 R_1 R_2 C_3 C_4 \quad (\text{AF50a})$$

Daraus errechnen sich die Widerstände:

$$R_1 = \frac{aC_3 + \left(a^2 C_3^2 - 4bC_3C_4 \right)^{\frac{1}{2}}}{2\omega_g C_3 C_4} \tag{AF51a}$$

$$R_2 = \frac{aC_3 - \left(a^2 C_3^2 - 4bC_3C_4 \right)^{\frac{1}{2}}}{2\omega_g C_3 C_4} \tag{AF51b}$$

- Damit reelle Werte für $R_{1,2}$ entstehen, muß gelten: $\frac{C_3}{C_4} \geq \frac{4b}{a^2}$ (AF51c)

In der Praxis soll $\frac{C_3}{C_4}$ nur wenig größer als die Bedingung sein!

Sonderfall: $C_3 = C_4 = C$ und $R_1 = R_2 = R$

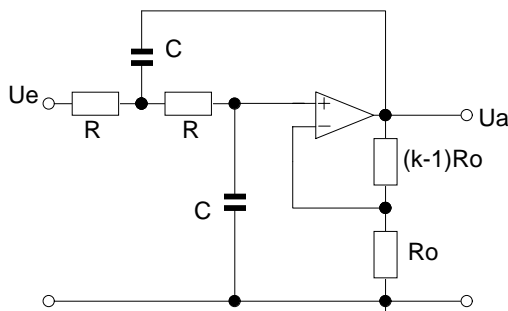


Abb. AF21: Sonderfall d. Sallen-Key-TP

$$A(P) = \frac{k}{1 + \omega_g P R C (3 - k) + (\omega_g P)^2 R^2 C^2} \tag{AF52}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit $A_{(P)}^{TP} = \frac{A_0}{1 + aP + bP^2}$ wird:

$$a = \omega_g R C (3 - k) \rightarrow \omega_g R C = \frac{a}{3 - k}$$

$$b = \omega_g^2 R^2 C^2 = \left(\frac{a}{3 - k} \right)^2 \tag{AF53a,b}$$

$$A_0 = k \text{ bzw. } k = 3 - \frac{a}{\sqrt{b}}$$

- Das Verhältnis von a/b ist nur mehr von der Wahl der Verstärkung k abhängig. Die Filtercharakteristik kann allein durch k festgelegt werden !

	Bessel	Butterworth	Tscheby. 2dB	ungedämpft (schwingt)
a	1.3616	1.4142	1.1813	---> 0
b	0.6180	1	1.7774	---> ∞
k = A ₀	1,268	1,5857	2,114	---> 3

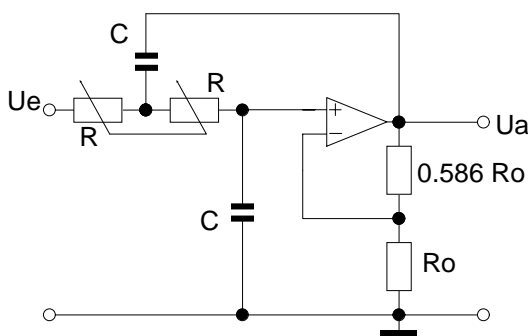


Abb. AF22: Abstimmbarer Butterworth-Tiefpaß

Filtercharakteristik nicht von R und C abhängig. Grenzfrequenz durchstimmbare, ohne die Filtercharakteristik zu ändern.

Beispiel:

Der nebenstehende abstimmbare Butterworth-TP 2. Ordnung benötigt bei $f_g = 2.4 \text{ kHz}$ und einem gewählten $C = 10 \text{ nF}$ Widerstände im Wert von

$$R = \frac{a}{(3 - k) 2\pi f_g C} = \frac{\sqrt{2}}{(3 - 1.5857) 2\pi \cdot 2.4 \cdot 10^3 \frac{1}{s} \cdot 10 \cdot 10^{-9} F} = 6.631 \text{ k}\Omega$$

AF.3.2.3 HP 2.Grades mit Einfachmitkopplung

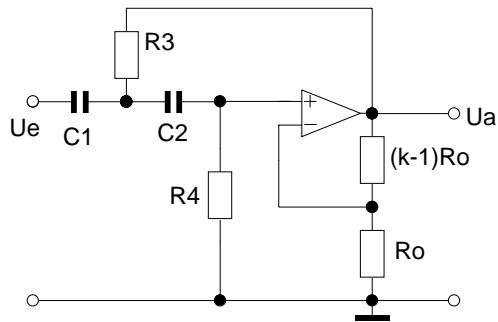


Abb. AF23: HP 2. Grades

Durch Einsetzen entsprechender Schaltelemente in die Grundschaltung von Abb. AF18 entsteht ein HP 2. Ordnung.

Die Herleitung der Dimensionierungs-Beziehungen wird nur skizziert. Genauer im Anhang zu diesem Kapitel.

$$A(P) = \frac{k}{1 + \frac{1}{\omega_g P} \left(\frac{1}{R_4 C_1} + \frac{1}{R_4 C_2} + \frac{1-k}{R_3 C_1} \right) + \frac{1}{P^2 \omega_g^2} \frac{1}{C_1 C_2 R_3 R_4}} \quad (\text{AF54})$$

Koeffizientenvergleich mit Gln. (AF20) liefert:

$$k = |A_\infty| \quad \text{und} \\ R_4^2 C_2^2 C_1 \omega_g^2 (1-k)b - R_4 a C_1 C_2 \omega_g + C_1 + C_2 = 0$$

Daraus errechnen sich die Widerstände für $k \neq 1$:

$$R_4 = \frac{a C_1 \pm \left(a^2 C_1^2 - 4b C_1 (1-k)(C_1 + C_2) \right)^{\frac{1}{2}}}{2 C_1 C_2 \omega_g b (1-k)} \quad \text{und} \quad R_3 = \frac{1}{b \omega_g^2 C_1 C_2 R_4} \quad (\text{AF55a,b})$$

Die häufige **Spezialisierung** $k = 1$ vereinfacht die Dimensionierungsbeziehungen zu:

$$R_4 = \frac{C_1 + C_2}{a \omega_g C_1 C_2} \quad \text{und} \quad R_3 = \frac{a}{b \omega_g (C_1 + C_2)} \quad (\text{durch Einsetzen in Gln. (AF54)}) \quad (\text{AF56a,b})$$

Die Werte für a, b werden wieder aus den Filtertabellen entnommen.

AF.3.2.4 Selektives Filter

Erweiterte Grundschaltung der Einfachmitkopplung:

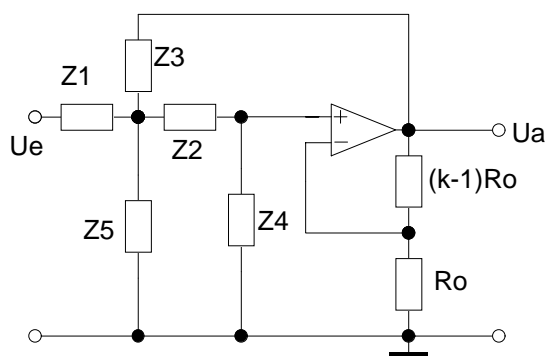
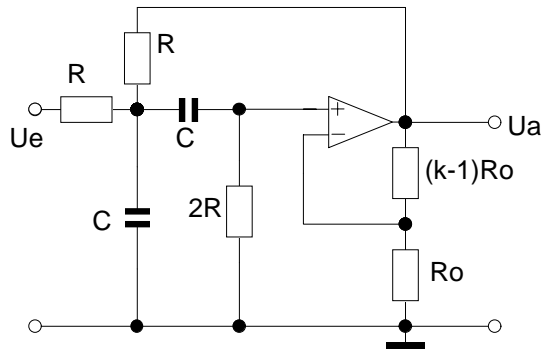


Abb. AF24: Erweiterung der Einfachmitkopplung

$$A(P) = \frac{k Z_3 Z_4 Z_5}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_5 + Z_4 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 (1-k)} \quad (\text{AF57})$$



Durch Einsetzen der Schaltelemente in Gln. (AF57) erhält man die Übertragungsfunktion des Selektiven Filters:

$$A(P) = \frac{k RC \omega_0 P}{1 + \omega_0 RC(3-k)P + \omega_0^2 R^2 C^2 P^2} \quad (\text{AF58})$$

K-vergleich mit Gln. (AF28) $A(P) = \frac{A_r P}{1 + \frac{1}{Q} P + P^2}$ liefert:

$$(\omega_0 RC)^2 = 1 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (\text{AF59})$$

Abb. AF25: Selektives Filter 2. Ordnung

Die Ü-Fkt. vereinfacht sich durch Einsetzen in (AF58) zu:

$$A(P) = \frac{k P}{1 + (3-k)P + P^2} \quad (\text{AF60})$$

und weiter durch Vergleich:

$$Q = \frac{1}{3-k} \quad \text{und} \quad A_r = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{k}{3-k} \quad (\text{AF61})$$

- **Vorteil:** Güte Q ist unabhängig von ω_0 durch k einstellbar
- **Nachteil:** A_r und Q sind voneinander abhängig.
- Bei $k = 3$ **Selbsterregung** ($Q \rightarrow \infty$). Bei hohen Güten kritisch einzustellen.

Eine weitere sehr vorteilhafte Schaltung für ein selektives Filter ist die **Mehrfachgegenkopplung**:

Für die Dimensionierung gelten die Beziehungen:

(AF62ff)

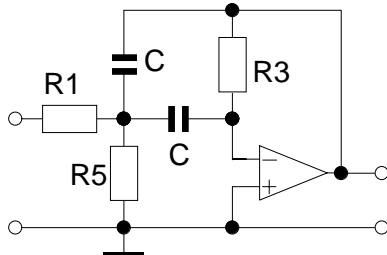


Abb. AF.26: Selektives Filter mit Mehrfachgegenkopplung

$$\omega_0 = \frac{1}{C} \left(\frac{R_1 + R_5}{R_1 R_3 R_5} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Resonanzfrequenz}$$

$$A_r = \frac{R_3}{2R_1} \quad \text{Verstärkung bei } \omega_0$$

$$Q = \frac{\omega_0 R_3 C}{2} \quad \text{Güte}$$

$$B = \frac{1}{\pi R_3 C} \quad \text{Bandbreite}$$

Vorteile:

- ω_0 , A_r , Q frei wählbar
- C ist wählbar
- ω_0 ist durch Variation des Widerstands R_5 durchstimmbar, ohne Änderung von B und A_r .

Nachteil:

- Um die Schleifenverstärkung der Gegenkopplung groß gegen 1 zu halten muß $A_0 \gg 2Q^2$ sein. (A_0 = Leerlaufverst. des O.P. bei der Arbeitsfrequenz)

AF.3.2.5 Sperrfilter (Notch-Filter)

Neben der grundsätzlichen Möglichkeit, Sperrfilter durch Zusammenschaltung von HP- und TP-Filtern zu bauen, ist die häufigste Schaltung das Doppel-T-Filter.

.1 Das passive Doppel-T-Filter.

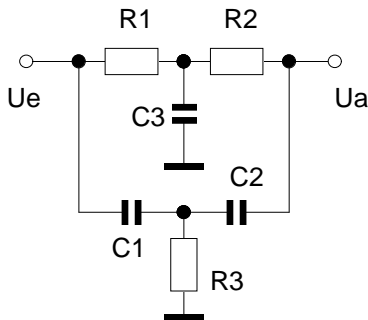


Abb. AF27: Passives Doppel-T-Filter

Die Analyse liefert Polynome 3. Grades, die durch die **Reduktionsbeziehung** $R_3(C_1 + C_2) = C_3 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ auf Polynome 2. Grades reduziert werden können. Für die optimale Dimensionierung

$C_3 = 2C$; $C_1 = C_2 = C$; $R_3 = \frac{R}{2}$; $R_1 = R_2 = R$ wird:

$$A(p) = \frac{1 + p^2}{1 + 4p + p^2} \quad (\text{AF63 ff})$$

$Q = 0,25$ maximale Unterdrückungsgüte

$\omega_0 = \frac{1}{RC}$ Sperrfrequenz

$A_0 = 1$ Verstärkung bei tiefen Frequenzen

- Für eine höhere Unterdrückungsgüte als 0,25 ist ein aktives Sperrfilter nötig!

.2 Aktives Doppel-T-Filter in Sallen-Key-Schaltung

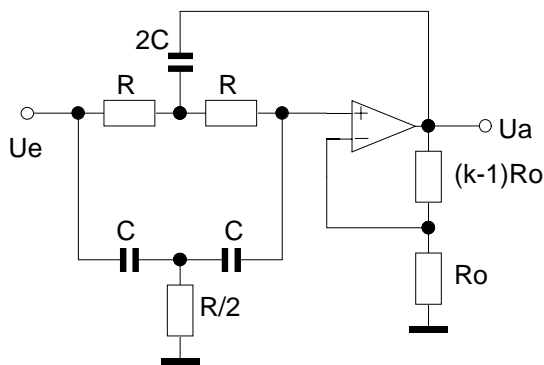


Abb. AF28: Aktives Notchfilter

Übertragungsfunktion:

$$A(p) = \frac{k(1 + p^2)}{1 + 2(2 - k)p + p^2} \quad (\text{AF64 ff})$$

$Q = \frac{1}{2(2 - k)}$ Unterdrückungsgüte

$\omega_0 = \frac{1}{RC}$ Sperrfrequenz

$A_0 = k$ Verstärkung bei tiefen Frequenzen

Es besteht ebenso die Möglichkeit, Rückkopplung und Masseanschluß an den T-Elementen zu vertauschen.

Für gute Sperrdämpfung müssen die Werte von R und C sehr genau sein.

.3 Notchfilter aus Bandpaß (sel. Filter 2. Ordnung) und Subtrahierer

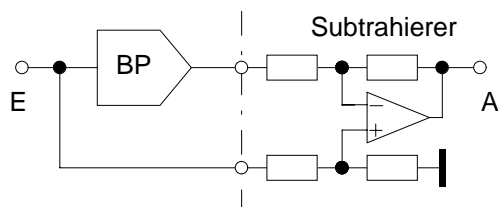


Abb. AF29: Notchfilter 2.Ordnung

Die allgemeine Übertragungsfunktion eines Notch 2. Ordnung (Gln. AF34) kann wie folgt zerlegt werden:

$$A(p) = \frac{A_0(1 + p^2)}{1 + \frac{1}{Q}p + p^2} = \frac{A_0 \left(1 + \frac{p}{Q} + p^2 \right) - \frac{A_0}{Q}p}{N}$$

$$= A_0 - \frac{\frac{A_0}{Q}p}{1 + \frac{p}{Q} + p^2} \quad \text{Bandpaß} \quad (\text{AF65})$$

Dies wird von einer Schaltung gem. Abb. AF29 realisiert.

AF.3.2.6 Allpass-Filter 2. Grades

.1 Erweiterte Brückenschaltung mit Mehrfachgegenkopplung ähnlich wie in Kap. AF.3.1.2

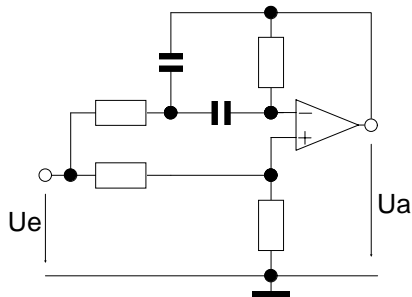


Abb. 30: Allpass mit Mehrfachgegenkopplung

Weitere Schaltungsvarianten und Übertragungsfunktionen in < 8 > .

.2 Allpass aus Bandpass (sel. Filter 2. Ordnung) und Subtrahierer (s. auch Kap. AF.3.2.5.3 Sperrfilter)

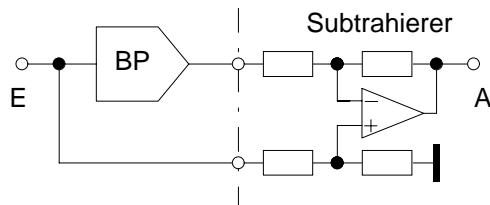


Abb. AF31: Allpass 2.Ordnung

Stellt man am Subtrahierer die Verstärkung am nichtinvertierenden Eingang auf 1 ein, entsteht die Übertragungsfunktion

$$A_{(P)} = \frac{U_a}{U_e} = 1 - \frac{\frac{A_r}{Q} \cdot P}{1 + \frac{P}{Q} + P^2} \quad (\text{AF66})$$

Mit $A_r = 2$ (Resonanzverstärkung des sel. Filters 2. Ordnung) ist:

$$A_{(P)} = \frac{1 + \frac{P}{Q} + P^2 - \frac{2P}{Q}}{1 + \frac{P}{Q} + P^2} = \frac{1 - \frac{P}{Q} + P^2}{1 + \frac{P}{Q} + P^2} \quad (\text{AF67})$$

Dies ist die Ü-Funktion eines Allpasses 2. Ordnung, allerdings normiert auf die Resonanzfrequenz des sel. Filters zweiter Ordnung $P = \frac{p}{\omega_0}$.

Normiert man die p auf die Grenzfrequenz des Allpasses (ω_g , bei der T_{gr} auf $\frac{T_{gr0}}{\sqrt{2}}$ abgesunken ist), entsteht:

$$P^* = \frac{p}{\omega_g} = \frac{p}{m \omega_0} \quad \text{und} \quad P = m \cdot P^* \quad (\text{AF68a})$$

Damit wird die Übertragungsfunktion auf die Grenzfrequenz des Allpasses normiert:

$$A_{(P)} = \frac{1 - \frac{mP^*}{Q} + m^2 P^{*2}}{1 + \frac{mP^*}{Q} + m^2 P^{*2}} \quad (\text{AF68b})$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man:

$$a_1 = \frac{m}{Q}; \quad b_1 = m^2 \quad \text{und für den Bandpass: } f_0 = \frac{f_g}{\sqrt{b_1}} = \frac{f_g}{m}; \quad Q = \frac{m}{a_1} = \frac{\sqrt{b_1}}{a_1} \quad (\text{AF69ff})$$

Gesamtverst. im invertierenden Pfad: $A_i = -2$
nichtinvertierenden Pfad: $A_n = +1$

AF.3.3 Entwurf aktiver Filter nach dem Analogrechner-Verfahren

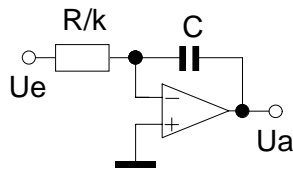
(Zustands-Variablen-Verfahren)

Mit dieser Entwurfsmethode ist (nahezu) jede Übertragungsfunktion zu realisieren. Als Bausteine werden die aus der Analogrechentechnik bekannten Integrierten und Summierer bzw. Subtrahierer verwendet.

AF.3.3.1 Elemente

a) Invertierender Integrator

Darstellung im Stromlaufplan



Symboldarstellung in Analogrechentechnik

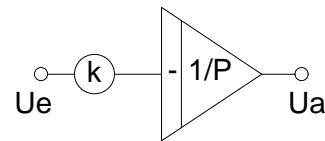


Abb. AF32: Einfach-Integrator

Die Einführung eines Gewichtungsfaktors k ergibt folgende Schreibweise:

$$A(p) = \frac{U_a}{U_e} = - \frac{1}{pC \left(\frac{R}{k} \right)}$$

$$U_a = - \frac{k}{P} U_e$$

mit $p = \omega_g P$ und $\omega_g = \frac{1}{RC}$ (bei $|A_p| = 1$) wird

oder aufgelöst in die Komponenten

$$A(p) = - \frac{k}{\omega_g PCR} = - \frac{k}{P}$$

$$U_a = (U_e) (k) (-) \left(\frac{1}{P} \right)$$

(AF70 ff)

(AF71 ff)

b) Invertierend summierender Integrator

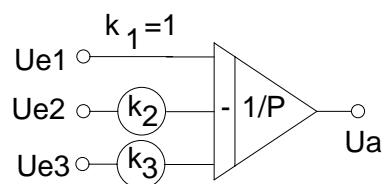
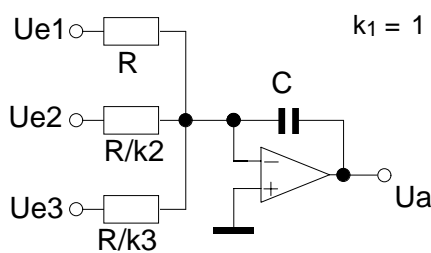


Abb. AF33: Summierender Integrator

Die Ausgangsspannung schreibt man im State-Variable-Verfahren

$$U_a = - U_{e1} \frac{1}{P} - U_{e2} \frac{k_2}{P} - U_{e3} \frac{k_3}{P}$$

(AF72)

c) Invertierer, invertierender Summierer

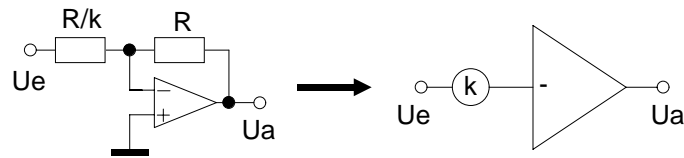


Abb. AF34: Invertierer

$$U_a = -k U_e$$

(AF73)

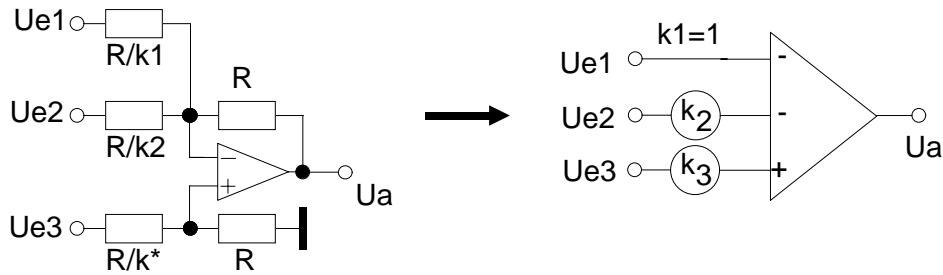


Abb. AF35: Invertierender Summierer und Subtrahierer

$$U_a = -k_1 U_{e1} - k_2 U_{e2} + k_3 U_{e3}; \quad \frac{1}{k^*} = \frac{1}{k_3} + \frac{k_1}{k_3} + \frac{k_2}{k_3} - 1$$

(AF74)

AF.3.3.2 Synthese einer Schaltung bei gegebener Übertragungsfunktion

Arbeitsschritte:

- 1) Angabe der Übertragungsfunktion möglichst in Normalform
- 2) Ausmultiplizieren der Übertragungsfunktion
- 3) Gleichung ggf. durch höchste Potenz von P dividieren, um Ausdrücke der Art $\frac{1}{P}$ oder $\frac{1}{P^2}$ zu erhalten.
- 4) Ordnen, daß links vom Gleichheitszeichen nur mehr "Ua" zu stehen kommt.
- 5) Realisierung und Zusammensetzen der Summanden der rechten Gleichungsseite.

Beispiel: Selektives Filter 2. Ordnung

- 1) Übertragungsfunktion: $\frac{U_a}{U_e} = \frac{\alpha P}{1 + \beta P + P^2}$
- 2) Ausmultiplizieren: $U_a + U_a \beta P + U_a P^2 = U_e \alpha P$
- 3) Division mit P^2 : $\frac{U_a}{P^2} + \frac{U_a \beta}{P} + U_a = U_e \frac{\alpha}{P}$
- 4) Ordnen: $U_a = -\frac{U_a}{P^2} - U_a \frac{\beta}{P} + U_e \frac{\alpha}{P}$
- 5) Realisieren:

$$1. \text{ Summand: } -\frac{U_a}{P^2} = U_a \left(-\frac{1}{P}\right) \left(-\frac{1}{P}\right) (-1)$$

Realisierung:

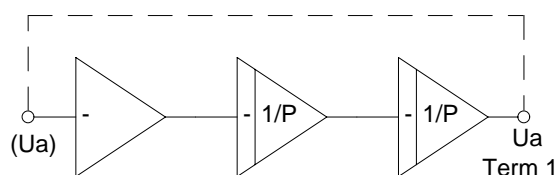


Abb. AF36

2. Summand: $-U_a \frac{\beta}{P} = \beta U_a \left(-\frac{1}{P}\right)$

Realisierung:

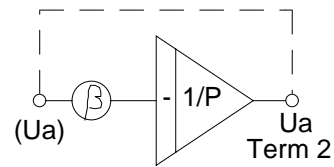


Abb. AF37

3. Summand: $U_e \frac{\alpha}{P} = -U_e \alpha \left(-\frac{1}{P}\right)$

Realisierung:

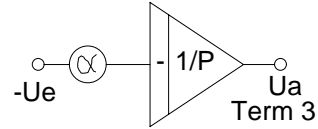


Abb. AF38

Zusammenfassen der Funktionen:

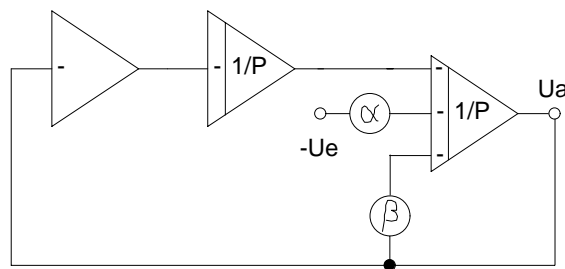


Abb. AF39: Selektives Filter in Symboldarstellung

Realisierung als Stromlaufplan:

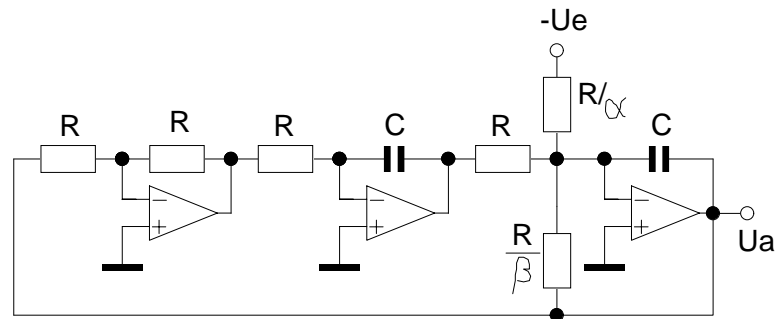


Abb. AF40: Schaltung eines selektiven Filters

Gemäß Kap. AF.2.11 gilt: $Q = \frac{1}{\beta}$; $A_r = \frac{\alpha}{\beta}$; $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

Damit lassen sich bei Vorgabe von z.B. Q, A_r , C und ω_0 die Widerstände berechnen.

Alle Filter 2. Ordnung weisen gleiche Nennerpolynome auf; deshalb sind die Schaltungen sehr ähnlich, nur die Einkopplung von U_e ist unterschiedlich. Daraus lassen sich leicht sog. **Universalfilter** entwickeln.

AF.3.3.3 Universalfilter 2. Ordnung

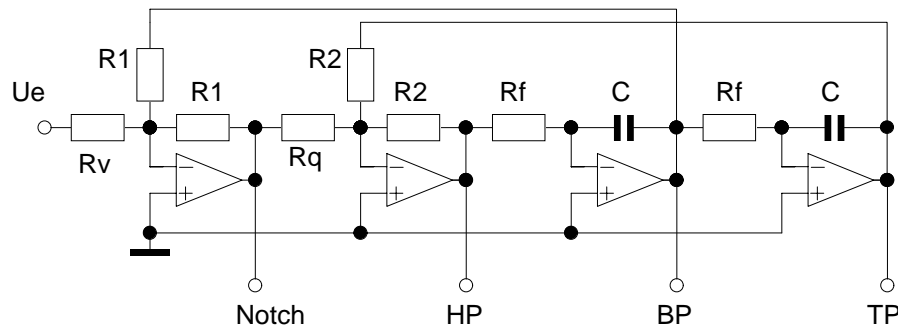


Abb. AF41: Beispiel eines Universalfilters 2. Ordnung

$$\text{HP, TP: } f_g = \frac{1}{2\pi R_f C}; \quad R_Q = Q_i R_2; \quad R_V = \frac{R_1}{A_{V\infty} Q_i}; \quad Q_i = \frac{\sqrt{b_i}}{a_i} = \text{Polgüte} \quad (\text{AF75})$$

$$\text{BP, Notch: } f_0 = \frac{1}{2\pi R_f C}; \quad R_Q = Q R_2; \quad R_V = \frac{R_1}{A_{V\infty}} \quad (\text{für Notch/BP}) \quad (\text{AF76})$$

- Je nach Auskopplung von U_a wirkt die Schaltung als TP, HP, BP, Notch.
- Nachteil: Wenn das Filter seine Universalität behalten soll, sind keine beliebig großen Güten mehr zu erreichen.
- Universalfilter werden als handelsübliche Analogbausteine angeboten.

Abb. AF42 zeigt ein Beispiel für ein handelsübliches Universalfilter.

In Abb. AF43 ist eine Beschaltungsmöglichkeit als sog. **BI-QUAD-Filter** gezeigt.

Die Beschaltung und die Dimensionierung der externen Bauelemente sind den Applikationsmitteilungen der Hersteller zu entnehmen.

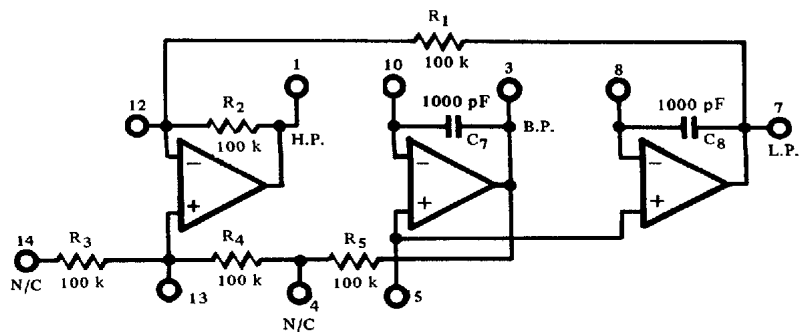


Abb. AF42: Handelsübliches Universalfilter

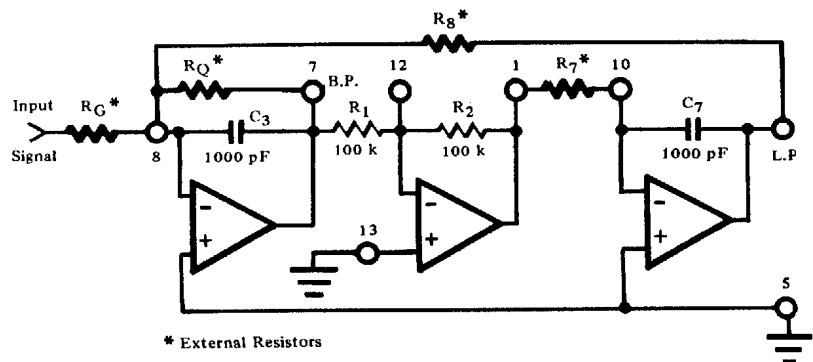


Abb. AF43: Universalfilter in BI-QUAD-Schaltung

AF.3.4 Berechnungsbeispiele

1. Beispiel: Es ist ein Tiefpaß 4. Ordnung mit Butterworth-Charakteristik für $f_g = 1 \text{ kHz}$ und $A_0 = 1$ mit Operationsverstärkern aufzubauen. Als Schaltung ist die Einfach-Mitkopplung mit Spannungsfolger zu verwenden.

Lösung:

Es werden 2 TP zweiter Ordnung verwendet.

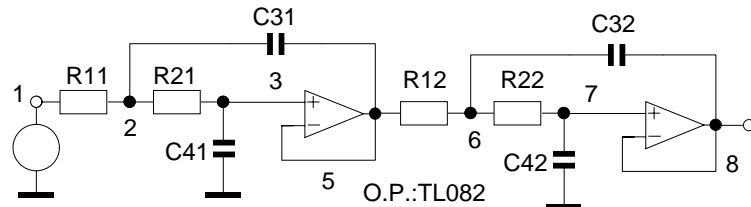


Abb. AF44: Butterworth-TP 4. Ordnung

Koeffizienten aus Filtertabelle:

1. Filter $a_1 = 1.8478$ $b_1 = 1$

2. Filter $a_2 = 0.7654$ $b_2 = 1$

Für die Berechnungen wird die Grenzfrequenz des Gesamtfilters eingesetzt.

Berechnung des 1. Filters:

Da es leichter ist, auch nicht normgerechte Widerstandswerte zu realisieren, werden zuerst die Kapazitäten bestimmt. Zur Abschätzung der Größenordnung setzt man Widerstandswerte in der Nähe von $10 \text{ k}\Omega$ an.

Gln. (AF41a) liefert:

$$a_1 = \omega_g C_4 (R_1 + R_2) \rightarrow C_4 \approx \frac{1.85}{2 \pi 10^3 20k} = 14.7 \text{ nF} \quad \text{gewählt: } C_4 = 15 \text{ nF}$$

$$\text{mit Gln. (AF42c) wird: } C_{31} \geq C_4 \frac{4b_1}{a_1^2} = 15 \text{ nF} \frac{4}{(1.8478)^2} \geq 17.6 \text{ nF} \quad \text{gewählt: } C_{31} = 18 \text{ nF}$$

Genauere Widerstandswerte:

$$R_{11} = \frac{a_1 C_{31} + \left(a_1^2 C_{31}^2 - 4b_1 C_{31} C_4 \right)^{\frac{1}{2}}}{2\omega_g C_{31} C_4} =$$

$$= \frac{1.8478 \cdot 18 \cdot 10^{-9} + \left[(1.8478 \cdot 18 \cdot 10^{-9})^2 - 4 \cdot 18 \cdot 10^{-9} \cdot 15 \cdot 10^{-9} \right]^{0.5}}{4 \pi 10^3 \cdot 15 \cdot 10^{-9} \cdot 18 \cdot 10^{-9}} = 11.313 \text{ k}\Omega$$

Das Minuszeichen vor der Klammer liefert: $R_{21} = 8.293 \text{ k}\Omega$

Berechnung des 2. Filters:

Größenordnung $R_1, R_2 = 10 \text{ k}$

$$C_{42} \approx \frac{0.7654}{2\pi 1000 \cdot 20k} = 6.09 \text{ nF} \quad \text{gewählt: } C_{42} = 6.8 \text{ nF}$$

$$C_{32} \geq \frac{C_{42} 4b_2}{a_2^2} = \frac{6.8 \text{ nF} \cdot 4}{0.7654^2} = 46 \text{ nF} \quad \text{gewählt: } C_{32} = 47 \text{ nF}$$

Ähnlich wie für Filter 1 errechnen sich:

$$R_{12} = 9.944 \text{ k}\Omega$$

$$R_{22} = 7.97 \text{ k}\Omega$$

Damit ergibt sich folgende dimensionierte Schaltung, die mit PSPICE simuliert wurde:

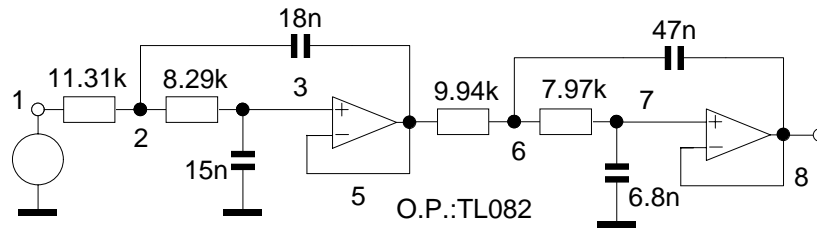


Abb. AF45: Dimensionierter Butterworth-TP 4. Ordnung

Steuerdatei zur Simulation:

```

Butterworthfilter 4.O. Sallen-Key 1 kHz A0= 1
.options nopage nomod limpts 1000
r11 1 2 11.313k
r21 2 3 8.293k
c31 2 5 18n
c41 3 0 15n
r12 5 6 9.944k
r22 6 7 7.97k
c32 6 8 47n
c42 7 0 6.8n
xop1 3 5 9 10 5 tl082
xop2 7 8 9 10 8 tl082
*
Vplus 9 0 dc 15
vminus 10 0 dc -15
vin 1 0 ac 10m sin(0 1V 800Hz)
*
.ac dec 20 1 1meg
*.tran 30u 3m 0 30u
.lib opnom.lib
.probe
.end

```

Butterworth-filter 4.O. Sallen-Key 1 kHz A0=1
 Date/Time run: 05/23/100 09:54:10 Temperature: 27.0

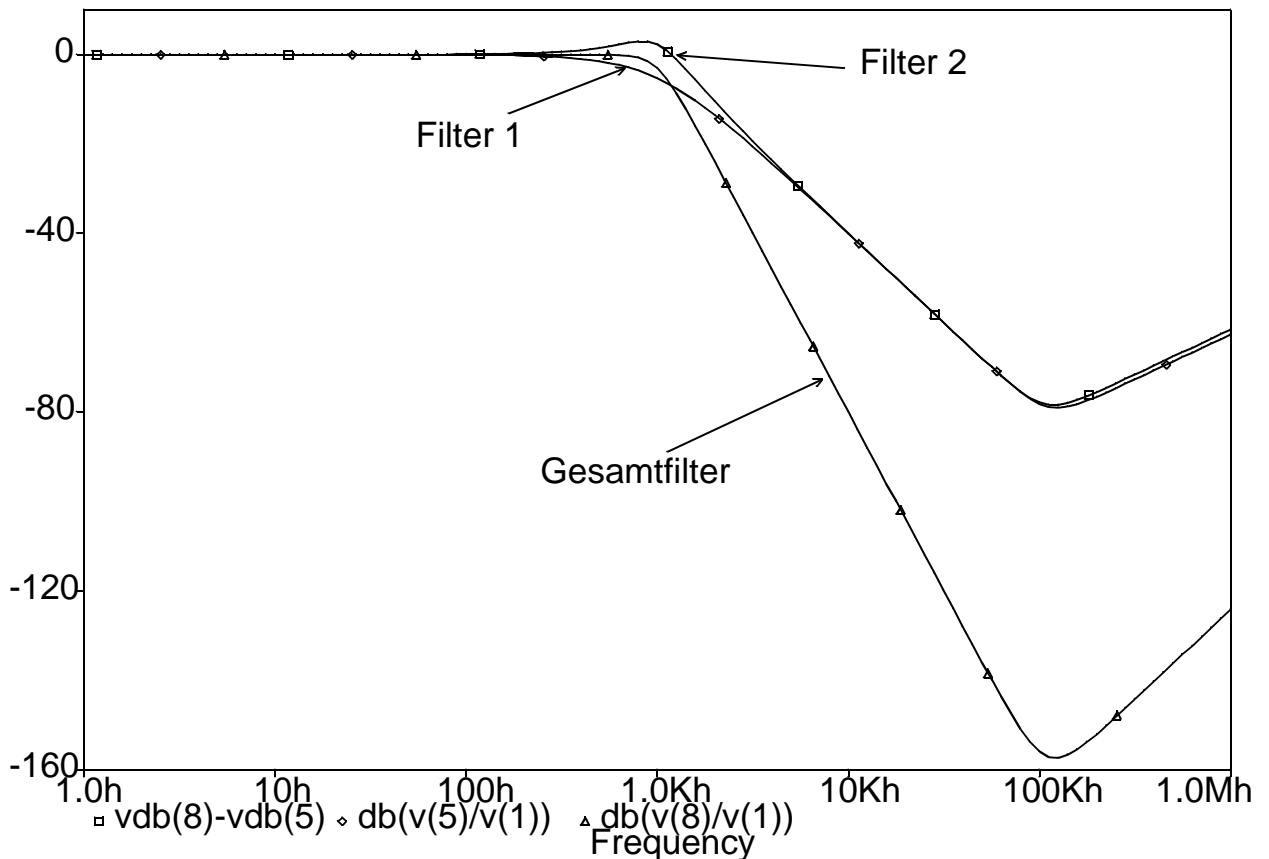


Abb. AF46: Frequenzgang des Butterworth-TP 4. Ordnung

2. Beispiel: Dimensionierung eines Filters nach Zustandsvariablenverfahren gemäß Schaltung Abb. AF40

Vorgaben: $Q = 50$; $A_r = 5$; $f_0 = 1\text{kHz}$; $C = 15\text{ nF}$

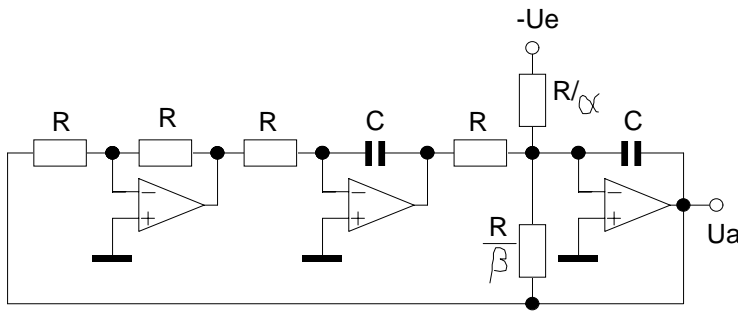


Abb.AF47: Beispiel eines sel. Filters 2. Ordnung für 1 kHz

Daraus berechnen sich die Werte:

$$R = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 15 \cdot 10^{-9}} = 10.6 \text{ k}\Omega$$

$$\beta = \frac{1}{Q} = \frac{1}{50}; \quad \alpha = A_r \beta = \frac{1}{10}$$

$$\frac{R}{\beta} = 530.5 \text{ k}\Omega \quad \frac{R}{\alpha} = 106.1 \text{ k}\Omega$$

Steuerdatei:

selfi2 selektives Filter 2. Ordnung Analogrech-Verf.

.options nopage

r2 5 6 10.61k

r1 6 7 10.61k

r3 5 4 10.61k

r4 1 2 106.1k

r5 2 3 10.61k

r6 2 7 530.5k

c1 3 4 15n

c2 2 7 15n

vin 1 0 ac 10m

xop1 0 6 10 11 5 tl082

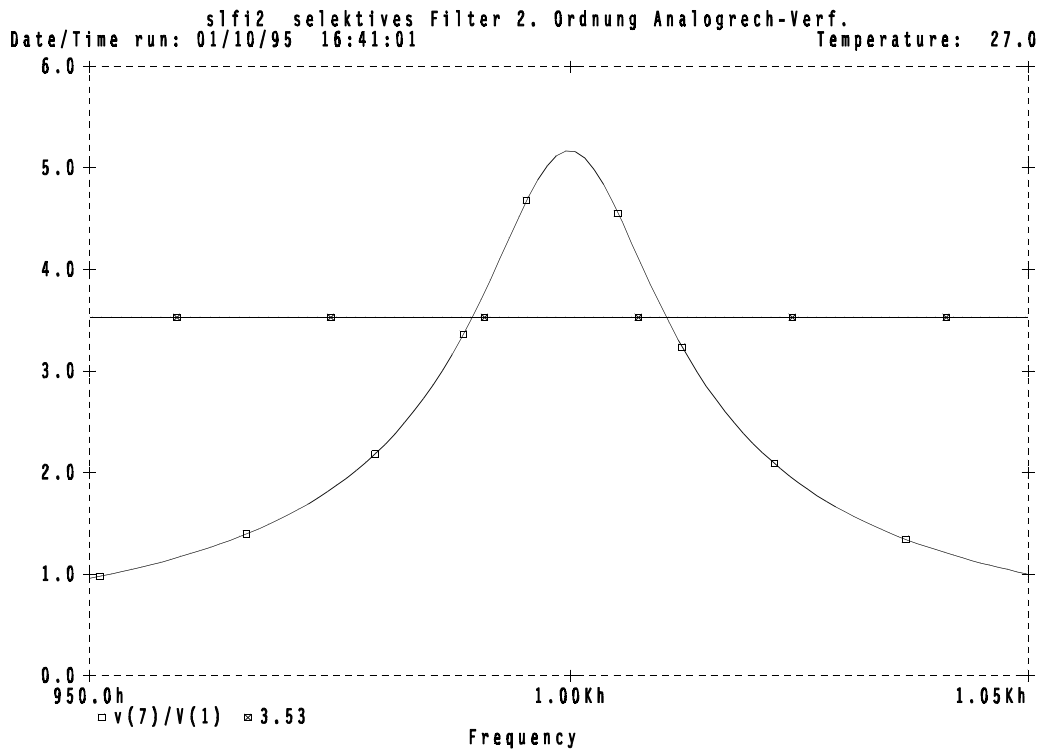
xop2 0 4 10 11 3 tl082

xop3 0 2 10 11 7 tl082

.lib lstnw.lib

.ac lin 100 500 2000

.probe



3. Beispiel: Es soll ein Allpass 2. Grades mit $f_g = 1\text{kHz}$ und einer normierten Gruppenlaufzeit v. $T_{gr0} = 0,5181$ aus einer Kombination eines sel. Filters 2. Ordnung mit einem Subtrahierer aufgebaut werden.

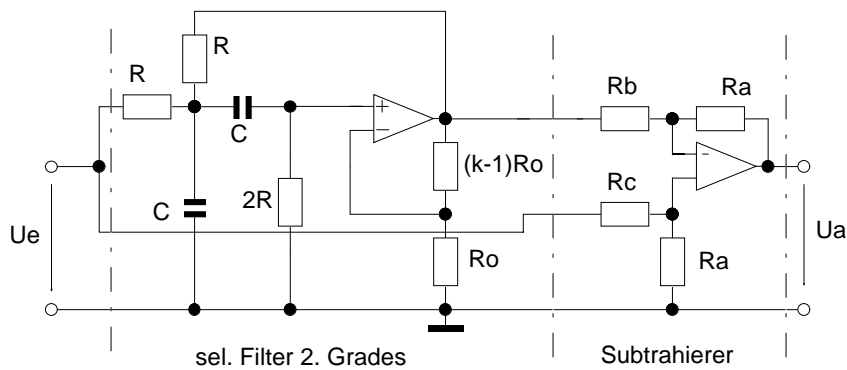


Abb. 48: Allpass 2. Ordnung

---> Koeffizienten: $a_1 = 1,6278$;
 $b_1 = 0,8832$

Als selektives Filter 2. Ordnung wird die Schaltung gemäß Abb. AF25 verwendet.

Vorgewählte Bauelemente: $C = 10\text{ nF}$;
 $R_a = 10\text{ k}\Omega$.

Sel. Filter:

Gln. (AF59ff) und AF(69ff) liefern:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{f_g}{m} \text{ ---> } R = \frac{\sqrt{b_1}}{2\pi f_g C} = \frac{\sqrt{0,8832}}{2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot 10\text{nF}} = 14,96\text{k}\Omega$$

$$Q = \frac{1}{(3-k)} = \frac{\sqrt{b_1}}{a_1} \text{ ---> } k = 3 - \frac{a_1}{\sqrt{b_1}} = 1,2679$$

$$A_r = \frac{k}{3-k} = k Q = 0,732$$

Subtrahierer: Es müssen die Bedingungen von Gln. (AF69ff) eingehalten werden. Für die Berechnung werden die Ergebnisse einer Übungsaufgabe aus dem Fach Schaltungstechnik herangezogen.

Für den invertierenden Pfad gilt:

$$A_i = A_r \cdot \frac{-R_a}{R_b} = -2; \text{ ---> } R_b = R_a \frac{A_r}{2} = 3,66\text{k}\Omega$$

Für den nichtinvertierenden Pfad gilt:

$$A_n = \frac{R_a(R_a + R_b)}{R_b(R_a + R_c)} = +1; \text{ ---> } R_c = \frac{R_a}{R_b}(R_a + R_b) - R_a = 27,3\text{k}\Omega$$

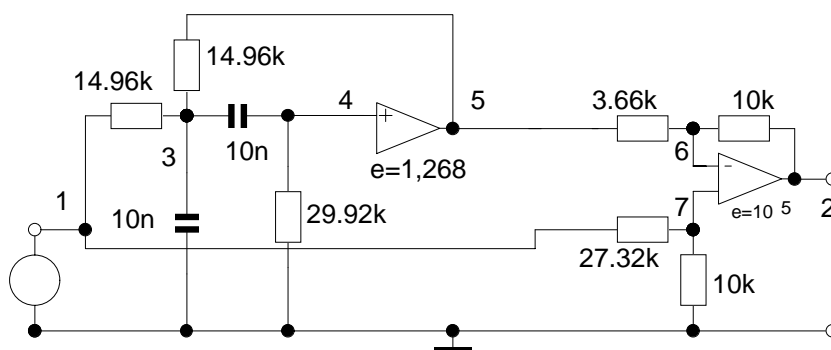


Abb. 49: Dimensionierter Allpass 2. Grades

Mit dieser Dimensionierung wird nebenstehende Schaltung simuliert:

Der Nichtinvertierer des Sel. Filters wird durch einen idealen Verstärker mit dem Verstärkungsfaktor $k = 1,268$ modelliert, und beim Subtrahierer ein id. O.P. mit der Leerlaufverstärkung 10^5 verwendet.

Simulationsergebnisse umseitig!

Allpass2: Rechenbeispiel im AF-skript
 Date/Time run: 02/19/101 17:13:24 Temperature: 27.0

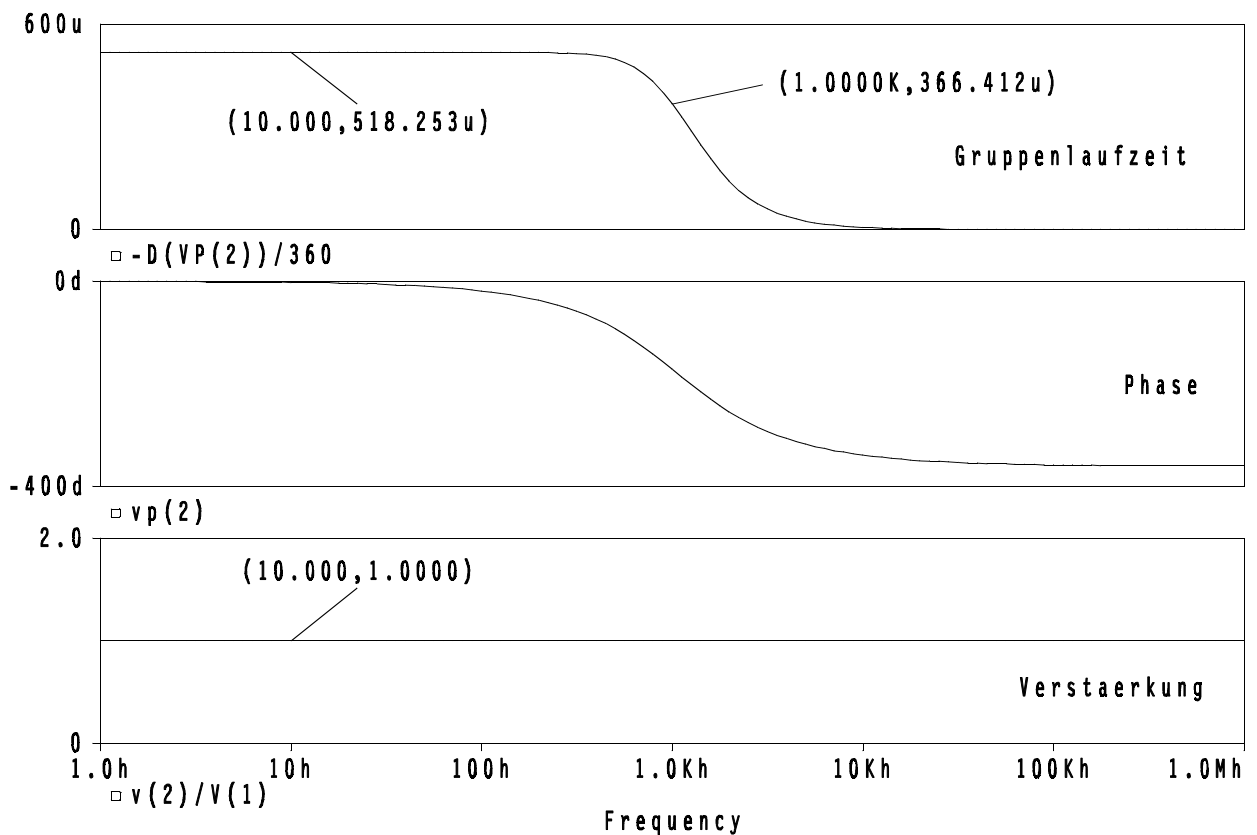


Abb. 50: Frequenzgang eines Allpasses 2. Grades

Die Ergebnisse der Simulation decken sich mit der Rechnung:

Die Gruppenlaufzeit bei tiefen Frequenzen ist: $t_{gr0} = \frac{a_1}{\pi f_g} = \frac{1,6278}{\pi \cdot 1kHz} = 518 \text{ us}$ (Sim.-Ergebnis: 518 us).

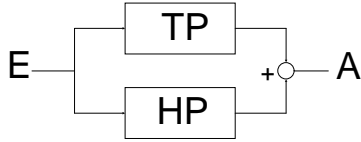
Bei f_g muss t_{gr} auf $\frac{t_{gr}}{\sqrt{2}} = \frac{518us}{\sqrt{2}} = 366,38us$ abgesunken sein. (Sim.-Ergebnis: 366,41us).

Der Verstärkungsbetrag ist 1,0 frequenzunabhängig. (Sim.-Ergebnis: 1,00).

AF.A. Anhang zu Kapitel MO/AF

AF.A.1 Herleitung der Ü-Funktion einer Bandsperrre 2. Grades

Ein Sperrfilter 2. Ordnung entsteht durch Parallel-Schaltung je eines HP und TP 2. Ordnung.



$$\text{TP: } A_{(P)}^{TP} = \frac{A_0}{1 + aP + bP^2} \quad (\text{AF77})$$

$$\text{HP: } A_{(P)}^{HP} = \frac{A_\infty}{1 + \frac{\alpha}{P} + \frac{\beta}{P^2}} = \frac{\frac{A_\infty}{\beta} P^2}{1 + \frac{\alpha}{\beta} P + \frac{1}{\beta} P^2} \quad (\text{AF78})$$

Abb. AF51: Entstehung einer Bandsperrre

Für ein **symmetrisches Sperrfilter** müssen HP und TP **spiegelbildlich** liegen.

Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$a = \frac{\alpha}{\beta}; \quad b = \frac{1}{\beta}; \quad A_0 = \frac{A_\infty}{\beta};$$

$$\beta = 1; \quad b = 1; \quad \alpha = a$$

außerdem muß bei Symmetrie $A_0 = A_\infty$ sein. Daraus folgt:

Dies in Gln. (AF64,65) eingesetzt ergibt die **Übertragungsfunktion**

$$A_{(P)}^{BS} = \frac{A_0}{1 + aP + 1P^2} + \frac{A_\infty P^2}{1 + aP + 1P^2} = \frac{A_0(1 + P^2)}{1 + aP + P^2} \quad (\text{AF79})$$

AF.A.2 Herleitung der Ü-Funktion der erweiterten Einfachmitkopplung

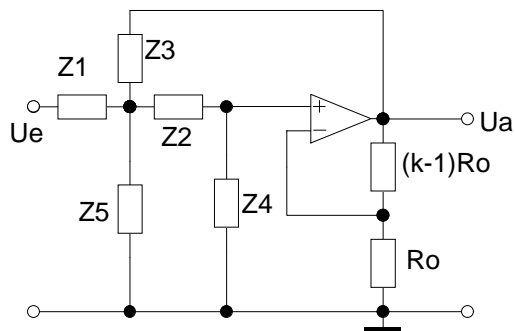


Abb. AF52: Erweiterte Einfachmitkopplung

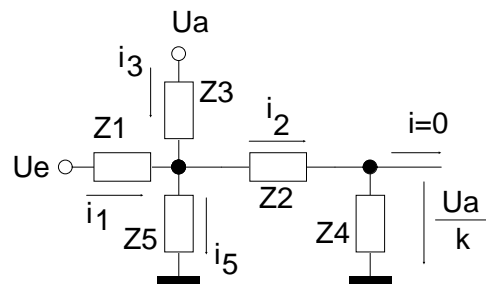


Abb. AF53: Ersatzbild zu Abb. AF40

$$A: i_1 + i_3 = i_5 + i_2$$

$$B: U_e = i_1 Z_1 + i_5 Z_5$$

$$C: i_5 Z_5 - \frac{U_a}{k} - i_2 Z_2 = 0$$

$$D: \frac{U_a}{k} = i_2 Z_4$$

$$E: -U_a + i_3 Z_3 + i_2 (Z_2 + Z_4) = 0$$

$$i_2 \text{ aus Gln.(D) in (C) liefert: (C') } i_5 = \frac{U_a}{k} \left(\frac{1}{Z_5} + \frac{Z_2}{Z_4 Z_5} \right)$$

$$i_2 \text{ aus Gln.(D) in (E) liefert: (E') } i_3 = \frac{U_a}{Z_3} - \frac{U_a}{k Z_4 Z_3} (Z_2 + Z_4)$$

$$i_5 \text{ aus Gln.(C') in (B) liefert: (B') } i_1 = \frac{U_e - \frac{U_a}{k} \left(1 + \frac{Z_2}{Z_4} \right)}{Z_1}$$

alle Ströme in (A):

$$\frac{U_e - \frac{U_a}{k} \left(1 + \frac{Z_2}{Z_4}\right)}{Z_1} + \frac{U_a}{Z_3} - \frac{U_a}{kZ_4Z_3} (Z_2 + Z_4) = \frac{U_a}{k} \left(\frac{1}{Z_5} + \frac{Z_2}{Z_4Z_5}\right) + \frac{U_a}{kZ_4}$$

geordnet:

$$\frac{U_a}{k} \left(-\frac{1}{Z_1} - \frac{Z_2}{Z_4} + \frac{k}{Z_3} - \frac{Z_2}{Z_4Z_3} - \frac{1}{Z_3} - \frac{1}{Z_5} - \frac{Z_2}{Z_4Z_5} - \frac{1}{Z_4} \right) = -\frac{U_e}{Z_1}$$

Nach Umstellung:

$$\frac{U_a}{U_e} = A(P) = \frac{kZ_3Z_4Z_5}{Z_1Z_2Z_3 + Z_1Z_3Z_4 + Z_1Z_3Z_5 + Z_2Z_3Z_5 + Z_4Z_3Z_5 + Z_1Z_2Z_5 + Z_1Z_4Z_5(1-k)} \quad (\text{AF80})$$

- Mit dieser Beziehung sind die **Übertragungsfunktionen aller Filterschaltungen mit Einfachmitkopplung** durch Einsetzen der jeweiligen Schaltelemente abzuleiten.